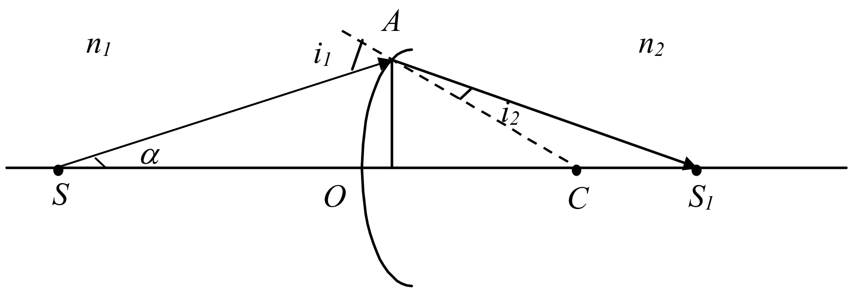
Р а б о т а 1. **ИЗУЧЕНИЕ ЛИНЗ И ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Цель работы: 1. Изучение методов расчета центрированных оптических систем, измерение их фокусных расстояний.
2. Определение положений главных и фокальных плоскостей.

1. ПРЕЛОМЛЕНИЕ НА СФЕРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Рассмотрим простейший случай преломления света на одной сферической поверхности, разграничивающей однородные среды с показателями преломления n_1 и n_2. Пусть эта поверхность обладает симметрией вращения относительно одной из прямых *OC,* проходящей через центр кривизны сферической поверхности, которую будем называть главной *оптической осью* (рис. 1).



Р и с. 1

В дальнейшем все отрезки вдоль оси будем отсчитывать от точки *O,* считая их положительными, если они откладываются от точки *O* вправо, т. е. в направлении распространения света, и отрицательными – если они откладываются влево.

Допустим, что точечный источник света *S* находится на оптической оси системы. Произвольный луч *SA,* падающий на сферическую поверхность под углом i_1, после преломления на поверхности под углом i_2 пройдет по пути AS_1. Обозначим длины *AS* и AS_1 через a_1 и a_2, соответственно.

Распишем площади полученных треугольников. Из рис. 1 видно, что

$$S_{\Delta SAC} + S_{\Delta CAS_1} = S_{\Delta SAS_1}. \qquad (1)$$

Учитывая, что $a_1 < 0,\ a_2 > 0,$ можно записать:

$$S_{\Delta SAC} = -\frac{1}{2} a_1 R \sin i_1, \qquad (2)$$

$$S_{\Delta CAS_1} = \frac{1}{2} a_2 R \sin i_2, \tag{3}$$

$$S_{\Delta SAS_1} = -\frac{1}{2} a_1 a_2 \sin(i_1 - i_2), \tag{4}$$

где $AC = R$ – радиус кривизны преломляющей поверхности. Он отсчитывается от сферической поверхности к ее центру и положителен в нашем случае. Подставляя выражения (2), (3), (4) в формулу (1), получим:

$$\frac{n_2}{a_2} - \frac{n_1}{a_1} = \frac{n_2 \cos i_2 - n_1 \cos i_1}{R}. \tag{5}$$

Согласно формуле (5), положение точки S_1 зависит от угла наклона α падающего луча к оптической оси, т. е. от угла падения i_1 и преломления i_2. Ограничимся малыми углами α, i_1, i_2. Лучи, удовлетворяющие такому условию, называются *параксиальными* (*приосевыми*). Для них можно записать

$$\cos i_1 \approx \cos i_2 \approx 1; \;\; \mathrm{AS}_1 \approx \mathrm{OS}_1, \mathrm{AS} \approx \mathrm{OS}.$$

В этом приближении формула (5) принимает вид:

$$\frac{n_2}{a_2} - \frac{n_1}{a_1} = \frac{n_2 - n_1}{R}. \tag{6}$$

В случае параксиального приближения положение точки S_1 не зависит от угла α. Следовательно, все параксиальные лучи, выходящие из одной точки оптической оси, после преломления на сферической поверхности пересекутся в одной точке, лежащей также на оптической оси. Точка S_1 будет поэтому оптическим изображением точки S в параксиальных лучах, а расстояния a_1 и a_2 будут обозначать соответственно расстояния от сферической поверхности до предмета и до изображения.

Формуле (6) можно придать вид:

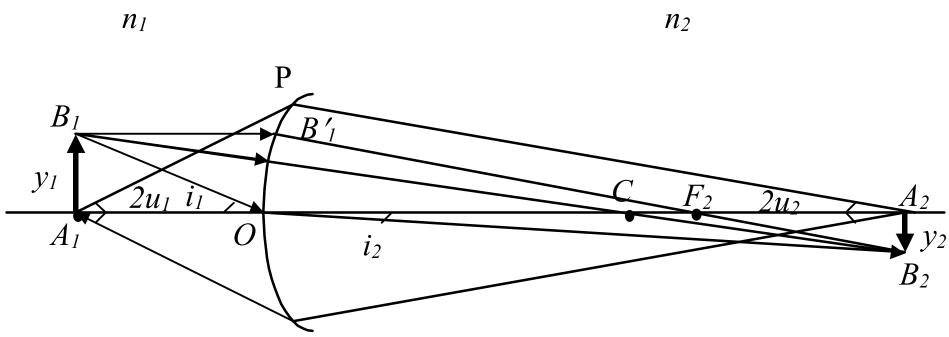
$$n_1\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{R}\right) = n_2\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{R}\right), \tag{7}$$

откуда следует, что произведение $n\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{R}\right)$ при преломлении сохраняет свою величину. Его называют *нулевым инвариантом Аббе.*

Основное уравнение (6) охватывает все случаи преломления лучей на сферической поверхности. Пользуясь установленным выше правилом знаков, можно разобрать случай выпуклой ($R > 0$) или вогнутой поверхности ($R < 0$). Точно так же, в зависимости от того, будут ли a_1 и a_2 иметь разные знаки или одинаковые, мы будем иметь случаи, когда изображение располагается с противоположной по сравнению с источником стороны преломляющей поверхности или лежит по одну сторону с ним. В первом случае ($a_2 > 0$) точка, именуемая изображением, есть действительно точка пересечения преломленных лучей. Такое изображение называется *действительным*. Во втором случае ($a_2 < 0$) преломленные лучи, идущие во второй среде, остаются расходящимися и реально не пересекаются. Название изображения относится к той воображаемой точке, которая представляет собой место пересечения предполагаемого продолжения преломленных лучей. Такое изображение называется *мнимым*.

2. ИЗОБРАЖЕНИЕ МАЛЫХ ПРЕДМЕТОВ. УВЕЛИЧЕНИЕ

Выберем в качестве предмета линию A_1B_1, перпендикулярную к оптической оси, и построим ее изображение A_2B_2 (рис. 2).



Р и с. 2

Для графического отыскания точки B_2 можно провести луч $B_1B_1' \,||\, A_1O$, тогда преломленный луч должен пройти через фокус F_2. Луч B_1C, проходящий через центр C сферической поверхности, не изменяет направления своего распространения.

Отношение линейных размеров изображения ($y_2 = A_2B_2$) и предмета ($y_1 = A_1B_1$) носит название линейного или поперечного увеличения V:

$$V = \frac{y_2}{y_1} = \frac{A_2B_2}{A_1B_1}.$$

Из треугольников A_1B_1O и A_2B_2O имеем

$$\frac{y_1}{a_1} = tgi_1, \quad \frac{y_2}{a_2} = tgi_2,$$

где a_1 и a_2 – расстояния от преломляющей поверхности до предмета и до его изображения, соответственно.

При малых размерах A_1B_1 и A_2B_2 (параксиальное приближение)

$$\frac{tgi_1}{tgi_2} = \frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{n_2}{n_1} \ ,$$

так что $$\frac{y_1 a_2}{a_1 y_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad \text{или} \quad \frac{y_2}{y_1} = V = \frac{n_1 a_2}{n_2 a_1}. \qquad (8)$$

Для преломляющей системы n_1 и n_2 всегда положительно и поэтому знак V определяется знаком отношения a_2 / a_1. Для расположений, соответствующих действительному изображению, как на рис. 2, a_1 и a_2 имеют разные знаки, т. е. V – отрицательно, и изображение перевернутое; для мнимых изображений – наоборот.

Плоскость предмета A_1B_1 и плоскость его изображения A_2B_2 являются сопряженными по отношению к данной оптической системе. Сопряженные плоскости называются *главными,* если для них $V = 1$, т. е. изображение получается прямым и в натуральную величину.

Из формул (6) и (8) следует, что для сферической поверхности главные плоскости совпадают между собой и представлены плоскостью, касательной к сфере в точке 0, т. е. $a_1 = a_2 = 0$. Поэтому фокусные расстояния сферической поверхности следует считать расстояниями от главных плоскостей до фокусов.

На рис. 2 изображены также углы u_1 и u_2, определяющие максимальное раскрытие (апертуру) пучков, падающих на сферическую поверхность (угол $2u_1$), и сопряженных им изображающих пучков (угол $2u_2$). Предельное значение этих углов определяется требованием соблюдения условий параксиальности, когда изображение небольшого предмета будет передаваться без искажения.

Для параксиальных лучей $A_1P \approx A_10 = a_1$ и $PA_2 \approx OA_2 = a_2$, поэтому

$$tgu_1 = u_1 = \frac{PO}{a_1}, \qquad tgu_2 = u_2 = \frac{PO}{a_2}, \qquad \frac{u_1}{u_2} = \frac{a_2}{a_1}.$$

На основании (8) имеем

$$V = \frac{y_2}{y_1} = \frac{n_1 a_2}{n_2 a_1} = \frac{n_1 u_1}{n_2 u_2} \ \text{или} \ y_1 n_1 u \ = y_2 n_2 u_2. \qquad (9)$$

Соотношение (9) носит название *теоремы Лагранжа-Гельмгольца* и справедливо для области параксиальных лучей.

Получение четких изображений при употреблении пучков со значительной апертурой возможно лишь при выполнении условия синусов Аббе:

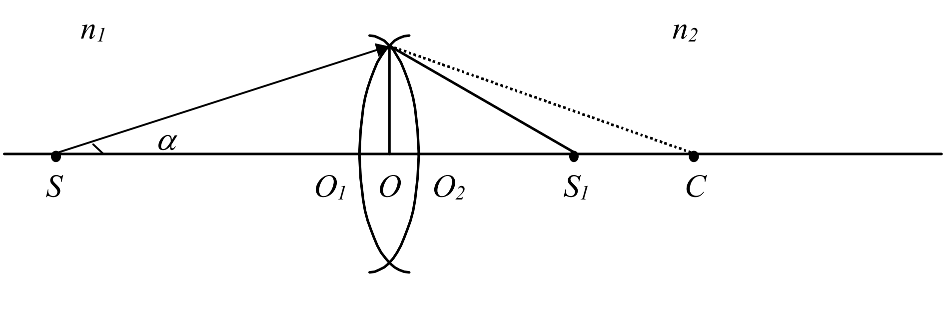
$$y_1 n_1 \sin u_1 = y_2 n_2 \sin u_2 . \qquad (10)$$

Строение пучка, преобразованного оптической системой, может быть только таким, какое допускают условия (9) или (10).

3. ОБЩАЯ ФОРМУЛА ЛИНЗЫ

Формулу (6) можно положить в основу геометрической теории любых центрированных систем в параксиальных лучах. Применяя ее к первой преломляющей поверхности сложной системы, найдем положение изображения, возникающего от преломления на этой поверхности. Полученное изображение играет роль предмета для преломления на второй сферической поверхности. Положение второго промежуточного изображения, возникающего от преломления на второй сферической поверхности, можно найти с помощью той же формулы и т. д. Путем такого применения формулы (6) к каждой из преломляющих поверхностей можно найти положение окончательного изображения, даваемого всей системой.

В качестве примера рассмотрим центрированную систему, состоящую из двух сферических поверхностей, ограничивающих какой-либо прозрачный, хорошо преломляющий материал (стекло, кварц). Такая система представляет обычную линзу. Линза называется *тонкой*, если ее толщина мала по сравнению с радиусами кривизны ограничивающих поверхностей. На рис. 3 для ясности линза изображена толстой, но в расчетах будем полагать, что точки O_1 и O_2 сливаются в точку O, которая носит название оптического центра линзы и от которой отсчитываются все расстояния.



Р и с. 3

Любой параксиальный луч, проходящий через O, практически не испытывает преломления, так как для этих лучей участки обеих поверхностей линзы можно считать параллельными, и лучи, проходя через них, не меняют направления, а лишь смещаются параллельно самим себе. Так как толщиной линзы мы пренебрегаем, то смещение это ничтожно мало и луч практически проходит без преломления, если с обеих сторон линзы находится одинаковая среда. Луч, проходящий через оптический центр, называется *осью линзы*. Ось, проходящая через центры обеих поверхностей, называется *главной,* остальные оси называются побочными.

Преломление на первой сферической поверхности создало бы без второй поверхности в сплошном стекле с показателем преломления n изображение в точке C, расположенной на расстоянии $OC = a,$ так что

$$\frac{n}{a} - \frac{n_1}{a_1} = \frac{n - n_1}{R_1}, \tag{11}$$

где $a_1 = OS,$

R_1 – радиус кривизны первой поверхности линзы;

n_1 – показатель преломления среды, в которой расположен предмет.

Для второй поверхности промежуточное изображение C будет служить предметом. Изображение такого предмета после преломления на второй поверхности, получаемое в точке $S_1,$ и будет окончательным изображением источника S, которое дает линза. Здесь опять применима формула (6), которая будет иметь вид:

$$\frac{n_2}{a_2} - \frac{n}{a} = \frac{n_2 - n}{R_2}, \tag{12}$$

где R_2 - радиус кривизны второй поверхности;

$a_2 = S_1O;$

n_2 – показатель преломления среды, в которой находится изображение.

Складывая равенства (11) и (12), получим формулу тонкой линзы:

$$\frac{n_2}{a_2} - \frac{n_1}{a_1} = \frac{n_2 - n}{R_2} + \frac{n - n_1}{R_1}, \tag{13}$$

где $\frac{n_2 - n}{R_2} + \frac{n - n_1}{R_1} = \Phi_1 + \Phi_2 = \Phi$ – оптическая сила тонкой линзы,

равная сумме оптических сил обеих преломляющих поверхностей.

Если справа и слева от линзы находится одна и та же среда с показателем преломления n_0, т. е. $n_1 = n_2 = n_0$, тогда формула (13) примет вид:

$$\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = \left(\frac{n - n_0}{n_0}\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = (N-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right), \qquad (14)$$

где $N = \frac{n}{n_0}$ – относительный показатель преломления.

Общая формула линзы (13) справедлива для тонких линз любой формы (двояковыпуклых, двояковогнутых и т. д.) при любом расположении предмета и соответствующем расположении фокуса. Нужно только принять во внимание знаки a_1, a_2, R_1, R_2, считая их положительными, если они отложены вправо от линзы, по ходу луча, и отрицательными, если они отложены влево от линзы (против хода луча).

Если предмет удаляется от линзы (a_1 возрастает по абсолютной величине), то изображение перемещается. Положение изображения, соответствующее предельному случаю, когда источник удален в бесконечность, носит название *фокуса линзы.* Фокус линзы есть точка, сопряженная бесконечно удаленной точке главной оси, или место схождения лучей, параллельных главной оптической оси. Расстояние от линзы до фокуса есть *фокусное расстояние тонкой линзы*. Плоскость, проходящая через фокус перпендикулярно к главной оси, называется *фокальной* плоскостью.

Для фокусных расстояний с использованием формулы (14) имеем следующие соотношения:

$$\text{при } a_1 \to -\infty, a_2 = f_2 = \frac{1}{(N-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)} = \frac{n_0}{\Phi}; \qquad (15)$$

$$\text{при } a_2 \to \infty, a_1 = f_1 = -\frac{1}{(N-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)} = -\frac{n_0}{\Phi}. \qquad (16)$$

Если справа и слева от линзы находится одна и та же среда, то фокусные расстояния линзы равны по величине и противоположны по знаку, т. е. фокусы лежат по разные стороны от линзы. Если по обе стороны линзы располагаются разные среды ($n_1 \neq n_2$), то фокусные расстояния f_1 и f_2, определяемые из формулы (13), разные и относятся между собой как $\frac{f_1}{f_2} = -\frac{n_1}{n_2}$.

В зависимости от знака и величины R_1 и R_2, а также от знака $(N-1)$ величина f_1 может быть положительной либо отрицательной, т. е. *фокус* может быть *мнимым* или *действительным*. То же относится и к f_2, причем нетрудно видеть, что если первый фокус мнимый, то и второй тоже будет мнимым, и наоборот. Если фокусы действительны, т. е. параллельные лучи после преломления сходятся, то линза называется *собирательной* или *положительной*. При мнимых фокусах параллельные лучи после преломления в линзе становятся расходящимися. Поэтому такие линзы называются *рассеивающими* или *отрицательными*.

Если материал тонкой линзы преломляет сильнее, чем окружающая среда ($n > n_0$, $N - 1 > 0$), то собирательными будут линзы, утолщающиеся к середине (двояковыпуклые, плосковыпуклые, вогнуто-выпуклые). К рассеивающим линзам принадлежат *двояковогнутые, плосковогнутые, выпукло-вогнутые*, т. е. линзы утончающиеся к середине. Если материал тонкой линзы преломляет меньше, чем окружающая среда, то линзы меняются свойствами.

Вводя фокусное расстояние линзы, придадим формуле линзы вид:

$$\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = \frac{1}{f}, f = f_2 = -f_1. \tag{17}$$

Легко видеть, что изменение величины a_1 приводит к изменению a_2 того же знака, т. е. изображение сдвигается вдоль оси в том же направлении, что и предмет. Исключение составляет лишь точка $a_1=f_1$, при прохождении которой изображение переходит из $a_2 = +\infty$ в $a_2 = -\infty$. На рис. 4 показано построение изображений и перемещение их в зависимости от перемещения предмета для положительной (рис. 4, *а*) и отрицательной (рис. 4, *б*) тонких линз, находящихся в воздухе. Для построения выбраны лучи, ход которых заранее известен. К таким лучам относятся:

1) луч, идущий параллельно оптической оси. В пространстве изображений ему соответствует сопряженный луч, идущий через задний фокус F_2;

2) наклонный луч, проходящий через передний фокус F_1. Сопряженный ему луч пойдет параллельно оптической оси.

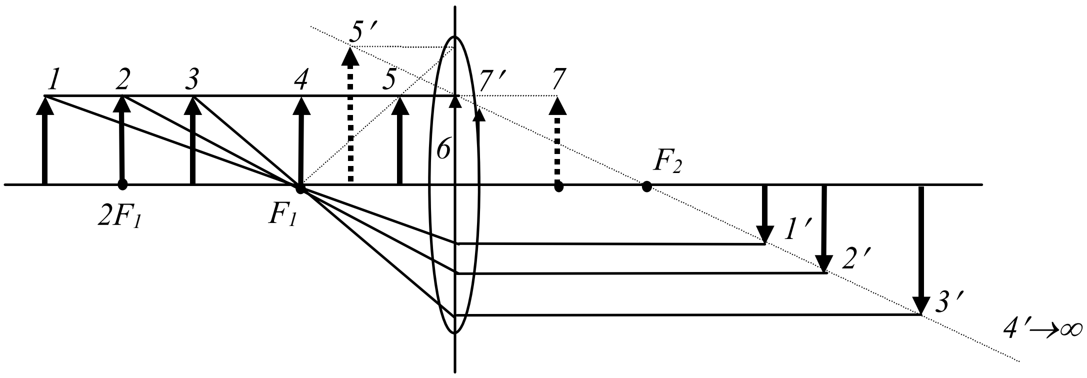
На рис. 4 *а, б* показано построение изображения для семи положений предмета, заданных расстоянием a_1:

1) $a_1 > 2f;$ 2) $a_1 = 2f;$ 3) $a_1 > f;$ 4) $a_1 = f;$ 5) $a_1 < f;$

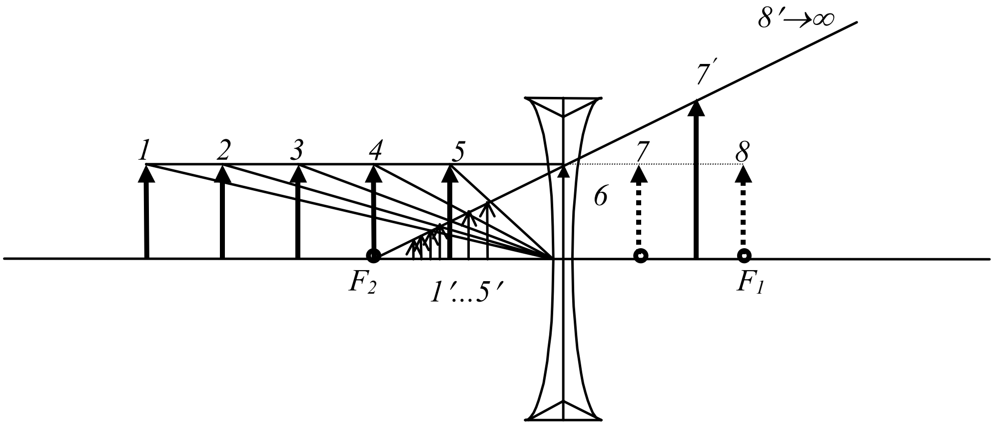
6) $a_1 = 0;$

7) предмет расположен за линзой;

8) предмет находится в переднем фокусе отрицательной линзы.



а



б

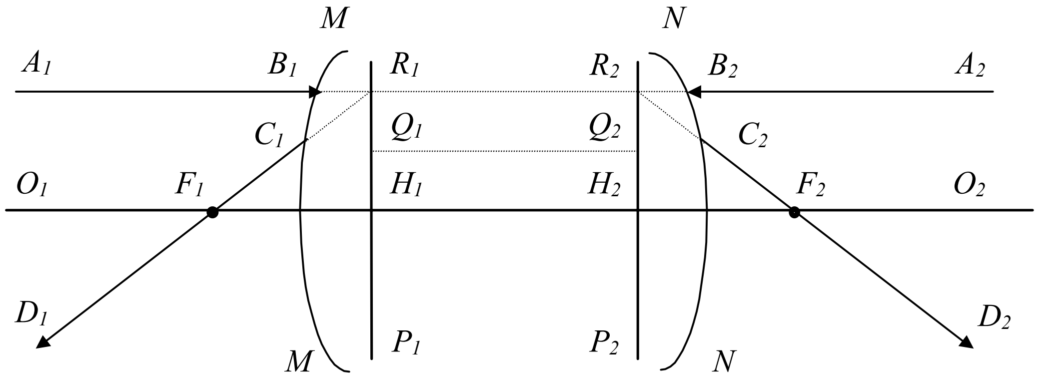
Р и с. 4

Предметы, расположенные справа от линзы, могут быть только мнимыми, так как они образуются мысленным продолжением падающих на линзу лучей. На рисунке эти предметы изображены штриховыми линиями.

4. ИДЕАЛЬНЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Идеальной оптической называют систему, в которой сохраняется гомоцентричность пучков и изображение оказывается строго геометрически подобно предмету. Каждой точке пространства объектов соответствует в идеальной системе точка пространства изображений. Эти точки носят название *сопряженных* точек. Точно также каждой прямой или плоскости пространства объектов должна соответствовать сопряженная прямая или плоскость пространства изображений.

Изложенное раньше показывает, что идеальная оптическая система может быть осуществлена в виде центрированной оптической системы, если ограничиться параксиальными лучами. Как показывает теория, изображение предметов с помощью идеальной оптической системы может быть построено без детального исследования хода лучей внутри системы и требует только знания ряда так называемых кардинальных точек и плоскостей, задание которых полностью описывает все свойства оптической системы.



Р и с. 5

Линия, соединяющая центры сферических поверхностей, представляет собой ось симметрии центрированной системы и называется *главной оптической осью системы*.

Пусть MM и NN – крайние поверхности, ограничивающие оптическую систему, а O_1O_2 – главная оптическая ось (рис. 5). Проведем луч A_1B_1, параллельный главной оптической оси. Этому лучу соответствует луч C_2D_2, выходящий из системы. Ход луча внутри оптической системы нас интересовать не будет. Точка F_2 пересечения луча C_2D_2 с главной оптической осью является изображением бесконечно удаленной точки (это легко показать с помощью второго луча, распространяющегося вдоль главной оптической оси). Точку F_2 называют задним фокусом системы (*фокусом в пространстве изображений*). Плоскость, перпендикулярная к O_1O_2 и проходящая через F_2, называется *фокальной плоскостью*. Задний фокус оптической системы не всегда, конечно, лежит справа от нее, как это изображено на рис. 5. Так, в рассеивающих системах этот фокус может лежать и слева от всех поверхностей, входящих в состав системы.

Рассмотрим теперь луч A_2B_2, входящий в систему справа и лежащий на продолжении луча A_1B_1. Слева из системы выйдет луч C_1D_1, сопряженный лучу A_2B_2. Точку F_1 называют передним фокусом системы (*фокусом в пространстве предметов*). Исходящие из него лучи в пространстве изображений параллельны оптической оси. Продолжим теперь C_1D_1 и C_2D_2 до пересечения с продолжениями A_1B_1 и A_2B_2 и отметим точки пересечения R_1 и R_2. Легко видеть, что эти точки сопряжены, т.е. являются изображением друг друга. Действительно, точка R_1 лежит на пересечении лучей A_1B_1 и C_1D_1, а точка R_2 – на пересечении сопряженных лучей A_2B_2 и C_2D_2 (для большей наглядности направление одной пары сопряженных лучей, например, A_2B_2 и C_1D_1, можно изменить на противоположное, пользуясь обратимостью световых лучей). Из построения ясно, что точки R_1 и R_2 лежат на одинаковом расстоянии от главной оптической оси, т. е. $R_1H_1 = R_2H_2$ (линейное поперечное увеличение равно $V = \dfrac{R_2H_2}{R_1H_1} = +1$). Можно показать, что в идеальной системе все точки плоскости P_1, перпендикулярной к главной оптической оси и проходящей через R_1, попарно сопряжены точкам плоскости P_2, также перпендикулярной к главной оптической оси и проходящей через R_2. При этом сопряженные точки находятся на одинаковых расстояниях от оси (например, точки Q_1 и Q_2 на рис. 5).

Две сопряженные плоскости P_1 и P_2, отражающие друг друга с поперечным увеличением $V=+1$, называются *главными плоскостями*, а точки H_1 и H_2 – *главными точками системы*. Расстояния от главных точек до фокусов называются *фокусными расстояниями*:
$f_1 = H_1F_1$; $f_2 = H_2F_2$. В том случае, когда с обеих сторон системы находится одна и та же среда (например, воздух) $|f_1| = |f_2|$.

Если известно положение фокусов и главных плоскостей, изображение предмета может быть найдено путем простых геометрических построений с использованием двух лучей, исходящих из одной точки. Рис. 6 иллюстрирует эти построения. Луч *1*, проведенный параллельно главной оси, имеет в качестве сопряженного луч *1′*, пересекающий вторую главную плоскость на высоте $H_2D_2 = H_1D_1$ и проходящий через фокус F_2. Луч 2, проходящий через фокус F_1 и пересекающий главную плоскость на высоте H_1C_1, пройдет на той же высоте ($H_1C_1 = H_2C_2$) через вторую главную плоскость и пойдет параллельно главной оси.

Оптическая система называется *положительной* (*собирающей*), если передний фокус F_1 лежит левее главной плоскости P_1, а задний фокус F_2 – правее главной плоскости P_2. Если же F_1 располагается правее P_1, а F_2 – левее P_2, система называется *отрицательной* или *рассеивающей*. Фокусному расстоянию систем приписывается определенный знак: *плюс* – для *собирающих* систем и *минус* – для *рассеивающих*. Если определить положение предмета и изображения по их расстояниям от соответствующих главных плоскостей, то легко установить соотношение между этими расстояниями (a_1 и a_2) и фокусным расстоянием системы, которое аналогично формуле (17).

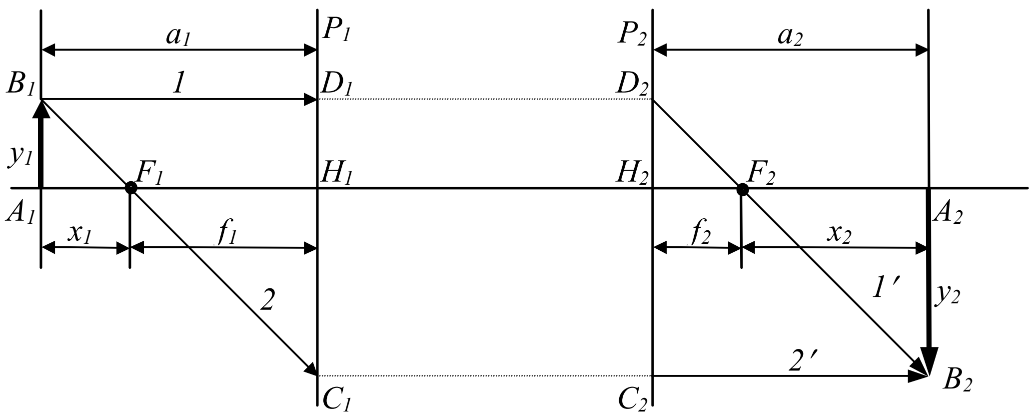


Рис. 6

Положение предмета и его изображения можно определять относительно фокусов F_1 и F_2 (рис. 6). Обозначая эти расстояния соответственно через x_1 и x_2 и рассматривая две пары подобных треугольников $A_1B_1F_1$ и $F_1H_1C_1$, $H_2D_2F_2$ и $F_2A_2B_2$, по определению линейного увеличения запишем

$$V = \frac{y_2}{y_1} = \frac{H_1C_1}{A_1B_1} = \frac{f_1}{x_1},$$

$$V = \frac{y_2}{y_1} = \frac{A_2B_2}{H_2D_2} = \frac{x_2}{f_2}. \tag{18}$$

Отсюда следует, что $\dfrac{f_1}{x_1} = \dfrac{x_2}{f_2}$ или

$$f_1 \cdot f_2 = x_1 \cdot x_2 . \qquad (19)$$

Из рис. 6 видно также, что

$$x_1 = a_1 - f_1 \text{ и } x_2 = a_2 - f_2 .$$

С учетом последних соотношений формула (19) примет вид:

$$\frac{f_1}{a_1} + \frac{f_2}{a_2} = 1 . \qquad (20)$$

Соотношения (18), (19), (20) наряду с (17), определяющие положение сопряженных точек в данной системе, играют роль формул системы.

Пользуясь правилом знаков, можно описать все свойства как собирательных, так и рассеивающих систем.

Следует подчеркнуть, что главные плоскости и главные точки могут лежать как внутри, так и вне системы и при этом могут располагаться как угодно несимметрично относительно поверхностей, ограничивающих оптическую систему.

Большой практический интерес представляет случай, когда размер системы в направлении главной оптической оси значительно меньше фокусного расстояния. В этом случае оптический луч, проходя внутри системы, мало смещается, так что точки C_1 и B_1, C_2 и B_2 (рис. 5) практически совпадают. Главные плоскости (и главные точки H_1, H_2) при этом совмещаются друг с другом и располагаются посредине системы. Такая оптическая система называется *тонкой линзой*. Расстояния a_1 и a_2 и фокусные расстояния можно в этом случае приближенно отсчитывать от центра линзы.

Кроме линейного увеличения, систему можно характеризовать *угловым увеличением* W, понимая под W отношение тангенсов углов u_2 и u_1, составляемых сопряженными лучами A_2M_2 *и* A_1M_1 с оптической осью (рис. 7), т. е. $W = \dfrac{tgu_2}{tgu_1}$.

Из рис. 7 видно, что $W = \dfrac{a_1}{a_2}$ (ибо $H_1M_1 = H_2M_2$), тогда как линейное увеличение $V = \dfrac{n_1 a_2}{n_2 a_1}$ (см. раздел 2), т. е.

$$W \cdot V = \frac{n_1}{n_2} . \qquad (21)$$

Если предмет и изображение расположены в одной среде ($n_1 = n_2$), то $W \cdot V = 1$.

Как угловое, так и линейное увеличение системы различно для разных точек оси, причем чем больше линейное увеличение, тем меньше угловое.

Сопряженные точки, в которых угловое увеличение системы $W=1$, представляют собой особенные точки системы. Эти точки называются *узлами* (или *узловыми точками*) и характеризуются тем, что сопряженные лучи, проходящие через узлы, параллельны друг другу, ибо $u_1 = u_2$.

В каждой системе такой парой точек будут точки N_1 и N_2, отстоящие от первого и второго фокусов соответственно на расстояния, равные $x_1 = F_1N_1 = f_2$ и $x_2 = F_2N_2 = f_1$.

Координаты этих точек удовлетворяют уравнению системы (19), т. е. они являются *сопряженными*.

Их расстояния относительно главных плоскостей равны соответственно $H_1N_1 = a_1' = f_1 - f_2$ и $H_2N_2 = a_2' = f_1 - f_2$, следовательно, для этих точек угловое увеличение равно 1, т. е. они служат узловыми точками системы.

Плоскости, проходящие через узлы перпендикулярно к оптической оси, называются *узловыми плоскостями*. Шесть плоскостей (*две фокальные, две главные и две узловые*) и шесть точек главной оси, им соответствующие (*фокусы, главные точки, узлы*), называются *кардинальными плоскостями* и *точками*.

Зная свойства кардинальных плоскостей и точек, можно построить изображение предмета в любой системе. На рис. 6 показано, как можно построить изображение, если дано расположение ее главных плоскостей и фокусов.

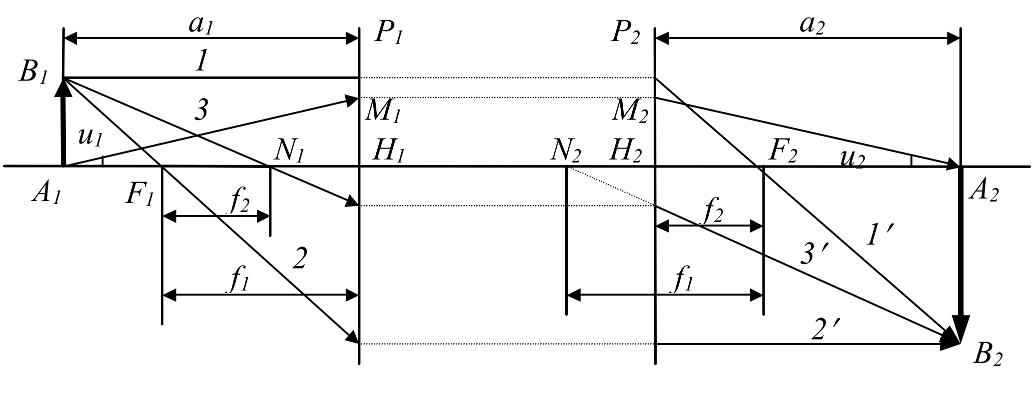


Рис. 7

На рис. 7 используется еще один луч (луч 3), идущий через узел N_1. Ему сопряженный луч $3'$ проходит через узел N_2 и параллелен лучу 3.

Для построения изображения предмета можно ограничиться двумя лучами из трех.

Когда по обе стороны системы располагается одна и та же среда, то фокусные расстояния f_1 и f_2 равны по абсолютной величине. Узловые точки в этом случае сливаются с главными.

Тонкая линза может рассматриваться как частный случай толстой линзы, в которой точки H_1 и H_2 совпадают и главные плоскости сливаются. Узловые точки, совмещенные с H_1 и H_2, также совпадут, образуя оптический центр линзы.

В настоящей работе измеряются фокусные расстояния тонких положительных и отрицательных линз, а также определяется фокусное расстояние и положение главных плоскостей сложной оптической системы. Измерения выполняются на оптической скамье, вдоль которой могут перемещаться рейтера с линзами, экранами, масштабами и т. д. Перед началом измерений центры всех линз нужно установить на одной высоте и проследить за тем, чтобы оптические оси линз были параллельны ребру оптической скамьи. Легко убедиться на опыте, что при слабых линзах и небольших увеличениях, которые применяются в данной работе, такая установка может быть произведена на глаз. При измерениях расстояния между деталями оптической системы отсчитываются по линейке, расположенной вдоль оптической скамьи. Отсчет производится по указателям, расположенным на основаниях рейтеров. Наводка изображения на резкость производится на глаз. Чтобы уменьшить роль возникающих при этом неточностей, измерения в каждом случае рекомендуется выполнять несколько раз, а результаты – усреднять.

Применяемые в работе линзы обладают заметной хроматической аберрацией (зависимость фокусного расстояния от длины световой волны). Точность измерений существенно повышается при работе со светофильтром.

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОКУСНОГО РАССТОЯНИЯ ТОНКОЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ЛИНЗЫ

Для тонкой положительной двояковыпуклой ($R_1 > 0,\ R_2 < 0$) линзы, материал которой преломляет сильнее, чем окружающая среда ($n > n_0$), в случае действительного источника ($a_1<0$) формула линзы принимает вид:

$$\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_1}=\frac{1}{f}, \tag{22}$$

где $$f = \frac{1}{(N-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_1}\right)}.$$

Фокусное расстояние тонкой положительной линзы можно определить различными способами.

Способ 1. Фокусное расстояние тонкой положительной линзы определяется исходя из формулы линзы (22). Для этого достаточно измерить расстояние от линзы до предмета *(a_1)* и до изображения *(a_2)* и вычислить f по формуле.

При измерениях на одном конце оптической скамьи устанавливают осветитель, в окно которого вставлено матовое стекло и прозрачная шкала, играющая роль предмета. На другом конце оптической скамьи устанавливают экран. Между экраном и предметом помещают исследуемую линзу. Перемещая линзу или экран вдоль скамьи, получают четкое изображение предмета на экране. По линейке, расположенной у основания оптической скамьи, отсчитывают расстояние между предметом и линзой, а также между линзой и изображением. Изменяя расстояние между предметом и линзой через каждые 3 см, снять зависимость $a_2 = f(a_1)$. Часть измерений выполнить при увеличенном, а часть при уменьшенном изображении. Полученные результаты представить графически в виде зависимости:

$\frac{1}{a_2} = \frac{1}{f} - \frac{1}{a_1}$ или $y = \beta_0 + \beta_1 x$, где $y = \frac{1}{a_2}, x = \frac{1}{a_1}, \beta_0 = \frac{1}{f}, \beta_1 = -1.$

Если результаты опыта могут быть описаны формулой (22), то все точки должны лечь на прямую, отсекающую на осях отрезки, равные $\frac{1}{f}$.

Более точное значение фокусного расстояния можно получить, если параметры линейной зависимости, в частности $\beta_0 = \frac{1}{N}\left[\sum_{n=1}^{N} y_n + \sum_{n=1}^{N} x_n\right]$, рассчитать по методу наименьших квадратов с использованием ЭВМ. Программа прилагается.

Способ 2. При описанном выше методе существенно, чтобы указатель на рейтере линзы был расположен против ее середины. Опишем способ, при котором положение указателя не сказывается на результате измерений.

Пусть расстояние между предметом и экраном превышает $4f$ и сохраняется постоянным. Нетрудно убедиться, что при этом всегда найдутся два таких положения линзы, при которых на экране получаются отчетливые изображения предмета (в одном случае – уменьшенное, а в другом – увеличенное). Из соображений симметрии ясно, что $a_1 = a_2'$ и $a_2 = a_1'$ (рис. 8). Обозначая расстояние между предметом и экраном через L, а расстояние между двумя положениями линзы l, получим: $l = a_2 - a_2' = a_1' - a_1$, $L = a_1 + a_2$

$$a_1 = \frac{L-l}{2}, \quad a_2 = \frac{L+l}{2}.$$

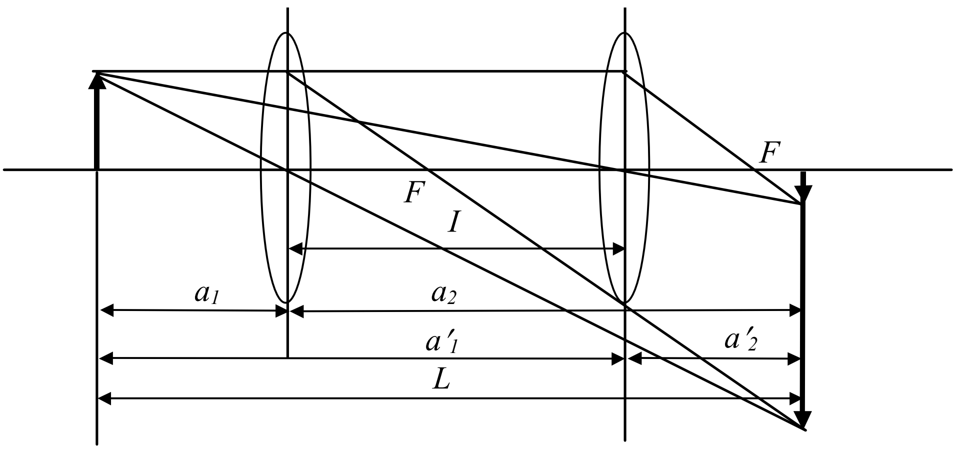


Рис. 8

Подставляя полученные значения a_1 и a_2 в формулу линзы (22), найдем после несложных преобразований

$$f = \frac{L^2 - l^2}{4L}. \tag{23}$$

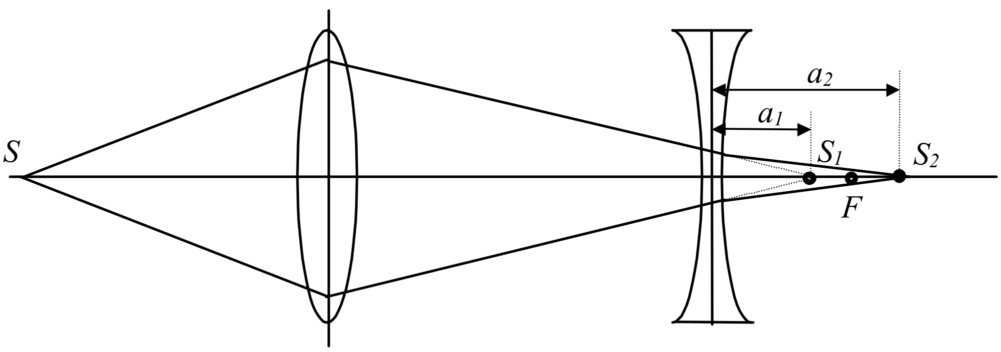
Измерения следует производить с линзой, которая использовалась в предыдущем опыте.

Способ 3. Фокусное расстояние тонкой положительной линзы можно определить с помощью зрительной трубы, установленной на бесконечность. Такую установку проще всего осуществить, наводя ее на достаточно удаленный предмет (например, на окно в конце длинного коридора). Трубу устанавливают на оптическую скамью, а между ней и предметом помещают исследуемую линзу. Передвигая линзу, следует установить ее так, чтобы в окуляре трубы появилось отчетливое изображение предмета. Поскольку труба настроена на бесконечность и, следовательно, сфокусирована на параллельный пучок лучей, отчетливое изображение предмета появляется тогда, когда плоскость предмета совпадает с фокальной плоскостью линзы. Расстояние между предметом и линзой в таком положении будет равно для тонкой линзы фокусному расстоянию. В случае толстой линзы зрительная труба позволяет определить только положение главного фокуса.

Опыт проводится несколько раз. По результатам определяется среднее значение фокусного расстояния, оценивается ошибка измерений.

6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОКУСНОГО РАССТОЯНИЯ ТОНКОЙ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ЛИНЗЫ

Способ 1. Определение фокусного расстояния отрицательной двояковогнутой $(R_1 < 0,\ R_2 > 0)$ линзы затрудняется тем, что изображение предмета получается мнимым (при действительном источнике) и поэтому не может быть непосредственно измерено. Эту трудность легко обойти с помощью вспомогательной положительной линзы, которая формирует мнимый источник для исследуемой линзы. В начале опыта на оптическую скамью помещают только одну положительную линзу и получают на экране действительное изображение предмета. По линейке отмечают положение S_1 этого изображения. Затем на пути лучей, выходящих из положительной линзы, располагают исследуемую отрицательную линзу (рис. 9).



Р и с. 9

На нее будет падать сходящийся пучок лучей. Точка S_1 пересечения падающих лучей играет по отношению к отрицательной линзе роль мнимого источника. Если точка S_1 окажется расположенной между отрицательной линзой и ее фокусом F, то действительное изображение источника S переместится теперь в точку S_2. Отмечая по линейке положение точки S_2 и координату отрицательной линзы, определяют расстояния a_1, a_2 и с помощью формулы (17) вычисляют фокусное расстояние отрицательной линзы. При вычислении нужно приписать расстояниям a_1, a_2 правильные знаки.

Способ 2. Если мнимый источник S_1 (рис. 9) совпадает с фокусом отрицательной линзы, то изображение S_2 перемещается в бесконечность, т.е. лучи выходят из линзы параллельным пучком (рис. 4, *б*). Параллельность пучка можно проверить с помощью зрительной трубы, установленной на бесконечность. Следовательно, поместив на оптическую скамью вместо экрана зрительную трубу, настроенную на бесконечность, и передвигая отрицательную линзу в пределах от точки S_1 до положительной линзы, добиваются четкого изображения предмета, наблюдаемого в трубу. Расстояние от точки S_1 до отрицательной линзы в таком положении и будет являться фокусным расстоянием отрицательной тонкой линзы.

7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОКУСНОГО РАССТОЯНИЯ И ПОЛОЖЕНИЯ ГЛАВНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ СЛОЖНОЙ ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Ни один из описанных выше способов не позволяет определить фокусное расстояние и положение главных плоскостей толстой линзы, т.е. такой оптической системы, толщина которой не мала по сравнению с фокусным расстоянием. Фокусное расстояние толстой положительной линзы определяют по способу Аббе (рис. 10). Пусть предмет, линейный размер которого равен y, находится на расстоянии x_1 от главного фокуса F_1 положительной оптической системы. Изображение предмета имеет размер y_1. Линейное увеличение V_1 равно

$$V_1 = \frac{y_1}{y} = \frac{f}{x_1}. \tag{24}$$

Если теперь передвинуть предмет в положение x_2, то линейное увеличение V_2 окажется равным

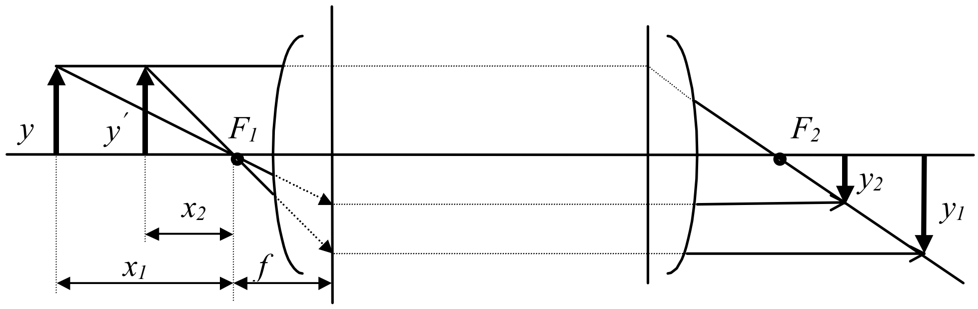
$$V_2 = \frac{y_2}{y} = \frac{f}{x_2}. \tag{25}$$

Из (24) и (25) нетрудно получить

$$f = \Delta \Big/ \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right), \tag{26}$$

где $\Delta = x_2 - x_1$ – перемещение предмета.

Таким образом, для определения фокусного расстояния толстой положительной линзы нужно измерить линейное увеличение системы при двух положениях предмета относительно линзы и расстояние между этими двумя положениями предмета.



Р и с. 10

При измерениях в качестве предмета используют освещенную шкалу. Размер изображений измеряют линейкой. Для повышения точности измерений линзу рекомендуется перемещать на такое расстояние Δ, чтобы V_1, V_2 заметно отличались друг от друга. Фокусное расстояние вычисляют по формуле (26).

Для нахождения главных плоскостей системы недостаточно знать фокусное расстояние, нужно определить еще положение главных фокусов. Для этого применяют зрительную трубу, настроенную на бесконечность. Перемещают линзу относительно предмета до тех пор, пока в зрительную трубу не увидят четкого изображения предмета. Положение предмета в этом случае соответствует положению одного из фокусов системы, которое фиксируется на шкале по отношению к указателю рейтера линзы. Расположив предмет с другой стороны (или повернув линзу), определяют аналогично положение второго фокуса относительно второй поверхности системы. Положение главных плоскостей системы находят, отложив от главных фокусов отрезки, равные фокусному расстоянию. В отчете следует изобразить в масштабе наружные поверхности изучаемой оптической системы, положение главных плоскостей и фокусов системы.

З А Д А Н И Е

1. Определить фокусное расстояние тонкой положительной линзы № 1 всеми способами, описанными в инструкции. Сделать анализ полученных результатов.
2. Определить фокусное расстояние тонкой отрицательной линзы № 2 двумя способами (исходя из формулы линзы и с помощью зрительной трубы). В качестве вспомогательной положительной линзы использовать линзу № 1.
3. Определить положение фокальных и главных плоскостей для толстой линзы № 3.

ВОПРОСЫ

1. Какие пучки называют параксиальными?
2. Вывести формулу преломления на сферической поверхности.
3. Какое изображение называют действительным, а какое – мнимым?
4. Вывести формулу тонкой линзы.
5. Какие линзы называются положительными, а какие – отрицательными?
6. Чем определяется величина и знак фокусного расстояния линзы?
7. Рассчитать фокусные расстояния линзы, если среды с двух сторон линзы разные.
8. Чему равна оптическая сила тонкой линзы и как она связана с фокусным расстоянием?
9. Описать способы измерения фокусного расстояния тонких линз.
10. Записать формулу двояковогнутой линзы, материал которой преломляет сильнее, чем окружающая среда, для случая:
    а) действительного предмета;
    б) мнимого предмета.
11. Построить изображение мнимого источника в отрицательной линзе, если мнимый источник расположен:
    а) между линзой и передним фокусом;
    б) за передним фокусом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландсберг Г.С.* Оптика. 5-е изд. М.: Наука, 1976. §§ 71,72,76,77,78.
2. *Сивухин Д.В*. Общий курс физики. Оптика. М.: Наука, 1980. §§ 9,10,11.
3 Физический практикум. Электричество и оптика / Под ред. В.И. Ивероновой. 2-е изд. М.: Наука, 1968. Задача 123.
4. Руководство к лабораторным занятиям по физике / Под ред. А.Л. Гольдина. 2-е изд. М.: Наука, 1973. Работа № 58.
5. Физический практикум / Под ред. Г.С. Кембровского. Мн.: Университетское, 1986. Работа № 37.