Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра физики

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Методические указания к лабораторной работе

Минск 2006

УДК 539.2 (075.8)
ББК 22.37я7
И 88

Составители:
А.А. Баранов, А.П. Каравай, Н.П. Юркевич

Рецензенты:
Г.К. Савчук, В.Н. Кудин

В методических указаниях изложены основы теории затухающих колебаний. На примере физического маятника показана возможность определения ряда характеристик затухающих колебаний.

Издание предназначено для студентов инженерно-технических специальностей всех видов обучения.

© БНТУ, 2006

Цель работы: Определить основные характеристики затухающих колебаний физического маятника.

Под **маятником** будем понимать твердое тело, под действием силы тяжести совершающее колебания вокруг неподвижной точки или оси, не проходящей через центр тяжести. Принято различать математический и физический маятники.

1. Математический маятник

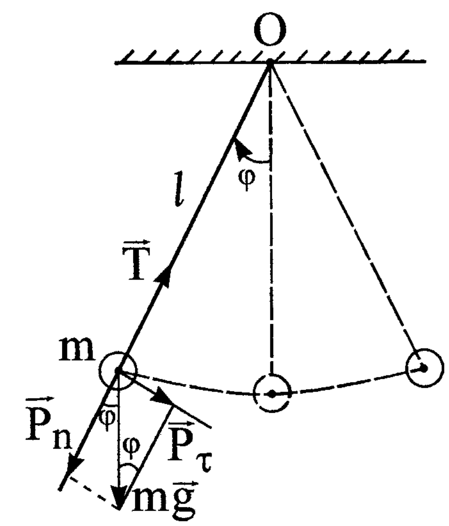

Рис. 1

Математическим маятником называют идеальную систему, состоящую из невесомой и нерастяжимой нити длиной l, на которую подвешена материальная точка с массой m (рис. 1). Составляющая силы тяжести $\vec{P}_n$ параллельна нити и уравновешивается реакцией нити $\vec{T}$. Составляющая силы тяжести $\vec{P}_\tau$ касательна к траектории движения маятника и перпендикулярна нити. Она всегда направлена к положению равновесия маятника и остается неуравновешенной. При малых углах отклонения маятника ($\varphi < 6°$) $\vec{P}_\tau$ будет равна

$$P_\tau = -mg\sin\varphi \approx -mg\varphi, \qquad (1)$$

где φ измеряется в радианах, знак "минус" означает, что $\vec{P}_\tau$ направлена в сторону, противоположную отсчету угла φ.

По второму закону Ньютона уравнение движения маятника имеет вид

$$ma_\tau = P_\tau, \qquad (2)$$

где a_τ – тангенциальное ускорение маятника, которое связано с угловым ускорением ε соотношением

$$a_\tau = l\varepsilon = l\frac{d^2\varphi}{dt^2}. \qquad (3)$$

Подставив выражения (1) и (3) в (2), получим

$$ml\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg\varphi \quad \text{или} \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\varphi = 0.$$

Введем обозначение

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} \qquad (4)$$

и окончательно запишем

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2\varphi = 0. \qquad (5)$$

Уравнение (5) представляет собой **дифференциальное уравнение движения математического маятника** для малых колебаний. Неизвестная функция $\varphi(t)$ входит в уравнение (5) сама и под знаком второй производной.

Функции, которые при двукратном дифференцировании превращаются сами в себя с обратным знаком, являются

функциями синуса и косинуса или показательной функцией с мнимым показателем степени ($e^{-i\omega t}$).

Пусть решением уравнения (5) будет функция типа

$$\varphi = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0). \qquad (6)$$

Здесь $A = \varphi_{max}$ и φ_0 – имеют постоянные значения, определенные начальными условиями. Продифференцируем дважды уравнение (6) по времени:

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \varphi_0). \qquad (7)$$

Если выражения (6) и (7) подставить в уравнение (5), то оно обратится в тождество. Следовательно, (6) действительно является решением (5).

Выражение (6) называют уравнением гармонических колебаний. Здесь A – амплитуда колебаний – наибольшее смещение маятника от положения равновесия; величина $(\omega_0 t + \varphi_0)$ – фаза колебания; постоянная φ_0 – начальная фаза, т. е. значение фазы в момент времени $t = 0$; ω_0 – круговая (циклическая) частота, связанная с периодом колебаний T соотношением $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.

Согласно формуле (4) **период колебаний математического маятника** будет равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

2. Физический маятник

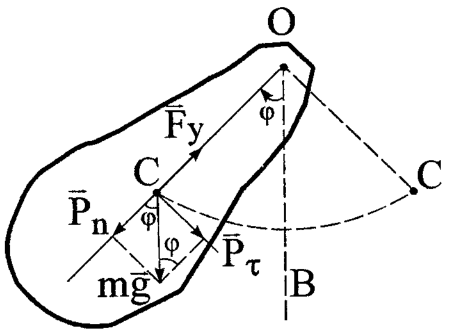

Рис. 2

Если колеблющееся тело нельзя представить как материальную точку, то маятник является физическим (рис. 2).

Физическим маятником называется твердое тело, совершающее колебания в поле силы тяжести вокруг оси, не проходящей через центр тяжести.

Центр тяжести тела – это такая точка, при прохождении через которую оси вращения, тело находится в состоянии безразличного равновесия (не будет колебаться) в поле силы тяжести. Колебания такого реального маятника при небольших отклонениях от положения равновесия будут гармоническими. Отклонение маятника от положения равновесия характеризуется углом φ, образованным линией $OC = l$, соединяющей центр тяжести (центр инерции) тела C и точку подвеса O, и вертикалью OB.

Сила тяжести приложена к центру тяжести. Составляющая P_n уравновешивается силой упругости F_y. Маятник движется к положению равновесия под действием составляющей P_τ, определяемой формулой (1). Момент этой силы по отношению к оси вращения, проходящей через точку O, будет равен

$$M = P_\tau \cdot l = -mgl\varphi\,. \quad (8)$$

Под влиянием этого момента маятник приобретает угловое ускорение ε, которое согласно основному закону динамики вращательного движения равно:

$$\varepsilon = \frac{M}{I}\,. \quad (9)$$

где I – момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку O. Момент инерции характеризует инертность тела при вращательном движении.

Согласно определению углового ускорения и с учетом соотношения (8) равенство (9) примет вид

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{mgl}{I}\varphi \quad \textbf{или} \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgl}{I}\varphi = 0\,.$$

Введем обозначение

$$\omega_o^2 = \frac{mgl}{I}\,. \quad (10)$$

Тогда дифференциальное уравнение **физического маятника** примет вид

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2\varphi = 0\,. \quad (11)$$

Уравнение (11) идентично уравнению (5), поэтому решением уравнения (11) также будет функция (6).

Таким образом, при малых отклонениях от положения равновесия **физический маятник** совершает гармонические колебания с **периодом колебания**, равным

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}\,. \quad (12)$$

Величину $L = \frac{I}{ml}$ называют приведенной длиной физического маятника. Так как в выражении момента инерции I входит масса маятника, то приведенная длина L не зависит от полной массы маятника, а зависит только от его геометрической формы и от распределения массы в нем. Таким образом, математический маятник является частным случаем физического маятника и формула периода колебаний для него может быть получена на основании выражения (12).

3. Затухающие колебания физического маятника

В реальных колебательных системах наряду с возвращающей силой P_τ всегда действуют силы трения, сопротивления среды и т. п., которые тормозят движение. Система непрерывно отдает часть энергии на работу против этих сил. Таким образом, убывание энергии системы приведет к уменьшению с течением времени амплитуды колебаний и свободные колебания становятся затухающими.

В большинстве случаев расход энергии обусловлен наличием сил сопротивления среды. При поступательном движении твердого тела сила сопротивления среды равна $F = -rv$, где r – коэффициент сопротивления среды, v – скорость тела. Все материальные частицы твердого тела при поступательном движении имеют одну и ту же скорость. При вращательном движении твердого тела все материальные частицы имеют постоянную угловую скорость, а линейная скорость у них разная. Поэтому затухание колебаний физического маятника определяется действием тормозящего момента, величина которого пропорциональна угловой скорости, т. е. производной от углового перемещения по времени:

$$M_T = -r\frac{d\varphi}{dt}. \qquad (13)$$

Знак "минус" указывает на то, что тормозящий момент M_T направлен в сторону, противоположную вектору угловой скорости.

Следовательно, колебательное движение физического маятника определяется вращающим моментом (8) и тормозящим моментом (13). Основное уравнение динамики вращательного движения в этом случае имеет вид

$$I\varepsilon = M + M_T. \qquad (14)$$

С учетом выражения (8) и (13) уравнение (14) принимает вид

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl\varphi - r\frac{d\varphi}{dt}$$

или

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{r}{I}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{mgl}{I}\varphi = 0. \qquad (15)$$

Введя обозначение

$$\frac{r}{I} = 2\beta, \qquad (16)$$

и учитывая (10), из уравнения (15) получают **дифференциальное уравнение затухающих колебаний**

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\beta\frac{d\varphi}{dt} + \omega_0^2\varphi = 0. \qquad (17)$$

Можно проверить, что общим решением дифференциального уравнения (17) является функция

$$\varphi = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0). \qquad (18)$$

Соотношение (19) называют **уравнением затухающих колебаний**, где A_0 и φ_0 – постоянные, определяемые из начальных условий; e – основание натурального логарифма; ω – частота затухающих колебаний, определяемая из решения уравнения (17):

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \qquad (19)$$

Решение (18) можно рассматривать как гармоническое колебание с частотой ω и амплитудой, **уменьшающейся с течением времени по экспоненте**:

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}. \qquad (20)$$

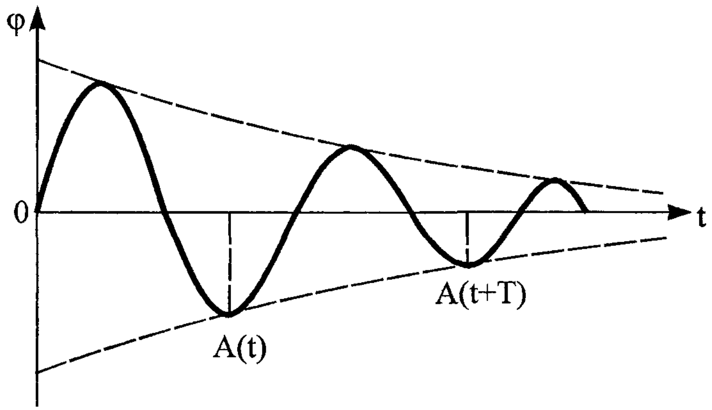

Рис. 3

На рис. 3 представлен график $\varphi(t)$, описываемый уравнением (18) (сплошная линия). Пунктиром изображена зависимость $A(t)$, описываемая уравнением (20). Здесь A_0 – амплитудное значение углового смещения φ в начальный момент времени. Скорость затухания колебаний определяется величиной β, которая называется **коэффициентом затухания**.

Из (20) следует, что отношение амплитуд, отделенных друг от друга интервалом времени в один период, остается постоянным в течение всего процесса затухания:

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \frac{e^{-\beta t}}{e^{-\beta t} \cdot e^{-\beta T}} = e^{\beta T}. \qquad (21)$$

Это отношение называют **декрементом затухания**, а его натуральный логарифм – **логарифмическим декрементом** затухания

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln e^{\beta T} = \beta T. \qquad (22)$$

Как и коэффициент затухания β, логарифмический декремент затухания является важной характеристикой затухающего колебательного процесса системы.

Сопротивление среды влияет не только на амплитуду колебания, но и на период колебаний. В соответствии с выражением (19) **период затухающих колебаний** равен:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \qquad (23)$$

Из (19) и (23) следует, что при наличии затухания частота колебаний системы уменьшается, а период возрастает. Однако при небольших затуханиях эти изменения невелики по сравнению с изменением амплитуды.

Пусть τ – **время затухания**, т. е. время, за которое амплитуда уменьшается в e раз (e = 2,718). Тогда $\frac{A_0}{A_0 e^{-\beta\tau}} = e^{\beta\tau} = e$ или, логарифмируя, $\beta\tau = 1$, откуда $\beta = \frac{1}{\tau}$. Следовательно, **коэффициент затухания β обратен по величине времени затухания**.

Логарифмический декремент равен

$$\lambda = \beta T = \frac{1}{\tau}T = \frac{1}{\tau}\cdot\frac{\tau}{N_e} = \frac{1}{N_e}.$$

Откуда **логарифмический декремент есть величина, обратная числу полных колебаний N_e, по истечении которых амплитуда убывает в e раз**.

4. Выполнение работы

1. **Измерить** период колебания физического **маятника T**:

$$T = \frac{t}{N},$$

где t – время, за которое маятник совершает N полных колебаний.

2. Определить момент инерции маятника I. Расчетная формула получается на основании соотношения (12)

$$I = \frac{mglT^2}{4\pi^2}.$$

3. Измерить число полных колебаний маятника N, **за время** которых амплитуда колебаний изменится от A_0 до A_t.

4. По данным наблюдений определить коэффициент затухания β. Расчетная формула получается на основании выражения (20):

$$\frac{A_0}{A(t)} = e^{\beta t}, \ln\frac{A_0}{A(t)} = \beta t, \beta = \frac{1}{t}\ln\frac{A_0}{A(t)} = \frac{1}{NT}\ln\frac{A_0}{A(t)}.$$

5. Пользуясь соотношением (22), рассчитать логарифмический декремент затухания $\lambda = \beta T$.

6. На основании соотношения (16) рассчитать коэффициент сопротивления среды $r = 2I\beta$.

7. Измерения и расчеты, предусмотренные пунктами 3–6, выполнить при двух различных сопротивлениях среды.

Контрольные вопросы

1. Что понимают под математическим и физическим маятниками?
2. Вывести дифференциальное уравнение движения математического маятника и указать его решение. Записать период колебаний математического маятника.
3. Вывести дифференциальное уравнение движения физического маятника и записать его период колебаний.
4. Какие колебания называют затухающими? Записать формулу тормозящего момента.
5. Составить дифференциальное уравнение затухающих колебаний и записать его решение.
6. По какому закону происходит изменение амплитуды затухающих колебаний? Начертить график.
7. Что называется коэффициентом затухания, логарифмическим коэффициентом затухания? Каков их физический смысл?
8. По какой **формуле определяется период затухающих** колебаний?