З а д а н и е 2. Определить момент инерции тела, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда.

З а д а н и е 3. Определить момент инерции тела сложной формы.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

I. Что называется моментом силы относительно точки? Относительно оси? Чему равен момент силы относительно оси, параллельной силе?

2. Что называется моментом импульса относительно точки? Относительно оси?

3. Выведите основной закон динамики вращательного движения.

4. Сформулируйте закон сохранения момента импульса.

5. Чему равен момент инерции материальной точки?

6. От чего зависит момент инерции тела?

7. Выведите формулу момента инерции однородного диска.

8. Запишите формулы моментов инерции различных тел правильной геометрической формы.

9. Сформулируйте теорему Штейнера.

I0. Запишите уравнение движения тела, совершающего крутильные колебания.

II. Как определяются моменты инерции тел методом крутильных колебаний?

Л и т е р а т у р а

I. С а в е л ь е в И.В. Курс общей физики, т. I. -М.: Наука, 1977, -4I6 с.

2. З и с м а н Г.А., Т о д е с О.М. Курс общей физики, т. I. -М.: Наука, 1974, -336 с.

3. Д е т л а ф А.А., Я в о р с к и й Б.М., М и л к о в с к а я Л.В. Курс физики, т. I. -М.: Высшая школа, 1973, -384 с.

Министерство высшего и среднего специального образования БССР

БЕЛОРУССКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Кафедра физики № I

N 4

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к лабораторной работе по физике "Определение моментов инерции тел методом крутильных колебаний"

М и н с к I 9 8 3

УДК 531.38 (076.5)

В методических указаниях содержатся основные сведения по динамике вращательного движения твердого тела и рассматривается один из методов экспериментального определения моментов инерции тел различной формы – метод крутильных колебаний.

Составили:
Н.И.Кузнецов, Ж.С.Тиковка, Л.В.Хартанович

Научный редактор В.А.Самойлюкович

Рецензенты:
В.П.Бобрович, Э.В.Ратников

Николай Иванович КУЗНЕЦОВ
Женна Сергеевна ТИКОВКА
Любовь Викторовна ХАРТАНОВИЧ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к лабораторной работе по физике
"Определение моментов инерции тел методом крутильных колебаний"

Редактор С.В.Кандыбо

Подписано в печать 10.05.83.
Формат $60x84^{1}/16$. Бумага т.№2. Офс.печ.
Усл.печ.л.0,80. Уч.-изд.л.0,68. Тир.300.Зак.363.Бесплатно.

Отпечатано на ротапринте БПИ.220027,Минск, Ленинский пр.,65.

© Белорусский политехнический институт, 1983.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: 1. Изучить основной закон динамики вращательного движения.
2. Познакомиться с некоторыми методами теоретического и экспериментального определения моментов инерции твердых тел.
3. Экспериментально определить методом крутильных колебаний моменты инерции тел различной формы.

ПРИБОРЫ И ПРИНАДЛЕЖНОСТИ: установка для определения моментов инерции тел, частотомер, штангенциркуль, исследуемые тела.

I. ОСНОВНОЙ ЗАКОН ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Изменение вращательного движения твердого тела в инерциальной системе отсчета происходит при воздействии на него моментов внешних сил.

М о м е н т о м с и л ы F о т н о с и т е л ь н о п р о и з в о л ь н о й т о ч к и O (часто ее называют началом или полюсом) называется векторное произведение радиуса-вектора $\vec{r}$, проведенного из этой точки к точке приложения силы, на силу $\vec{F}$.

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}]. \qquad (I.I)$$

Момент силы $\vec{M}$ всегда перпендикулярен $\vec{r}$ и $\vec{F}$ и образует с ними правую тройку векторов (при наблюдении из конца вектора $\vec{M}$ видно, что вращение по кратчайшему пути от $\vec{r}$ к $\vec{F}$ происходит против часовой стрелки (рис. I.I).

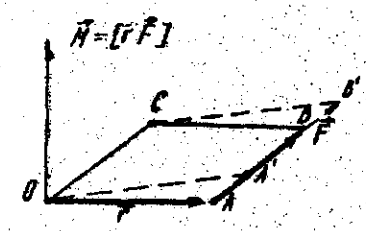

Рис. I.I

Из определения момента силы следует, что момент $\vec{M}$ не изменится, если точку приложения силы перенести в любую другую точку, расположенную на линии действия силы. Действительно, если точку приложения силы перенести из A в A', то параллелограмм $OABC$ перейдет в параллелограмм $OA'B'C$. Оба параллелограмма имеют общее основание OC и общую высоту. Поэтому их площади равны, что и доказывает наше утверждение.

Модуль вектора $\vec{M}$ согласно определению векторного произведения равен

$$M = rF\sin[\vec{r}\vec{F}] = rF\sin\alpha = F\cdot d.$$

Из рис. I.2 видно, что $r\sin\alpha = d$. Расстояние d от точки, относительно которой определяется момент силы, до линии действия силы называется п л е ч о м с и л ы. Следовательно, модуль момента силы равен произведению силы на плечо.

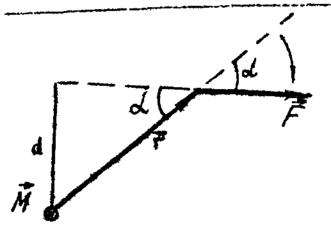

Рис. I.2

Если $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$, то

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}] = [\vec{r}\vec{F_1}] + [\vec{r}\vec{F_2}].$$

Это значит, что момент равнодействующей двух или нескольких сил относительно некоторого начала равен геометрической сумме моментов составляющих сил относительно того же начала.

Рассмотрим твердое тело, которое может вращаться вокруг неподвижной оси (рис. I.3). Возьмем на оси вращения точку O и будем характеризовать положение образующих тело частиц с помощью радиусов-векторов, проведенных из этой точки к частицам. Выделим из тела некоторую частицу массой m_i, которую можно рассматривать как материальную точку. Положение ее определяется радиусом-вектором $\vec{R_i}$. Обозначим через $\vec{f_i}$ результирующую всех внутренних сил, а $\vec{F_i}$ – результирующую всех внешних сил, приложенных к данной частице. В соответствии со вторым законом Ньютона уравнение движения этой материальной точки имеет вид:

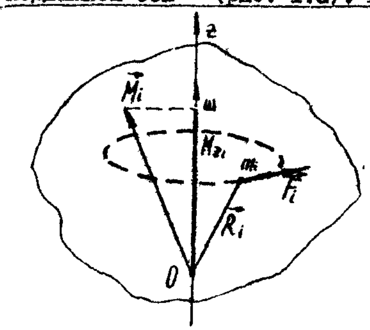

Рис. I.3

$$m_i\frac{d\vec{v_i}}{dt} = \vec{f_i} + \vec{F_i} \qquad (I.2)$$

где $\vec{v_i} = d\vec{R_i}/dt$ – скорость i-й точки.

Умножим векторно $\vec{R_i}$ на каждый член уравнения (I.2)

$$m_i\left[\vec{R_i}\,\frac{d\vec{v_i}}{dt}\right] = [\vec{R_i}\vec{f_i}] + [\vec{R_i}\vec{F_i}]. \qquad (I.3)$$

Знак производной по времени в левой части этого уравнения можно вынести за знак векторного произведения*. Просуммировав уравнения (I.3) для всех точек тела, получим:

$$\frac{d}{dt}\sum_i[\vec{R_i}\,m_i\vec{v_i}] = \sum_i[\vec{R_i}\vec{f_i}] + \sum_i[\vec{R_i}\vec{F_i}]. \qquad (I.4)$$

Первое слагаемое в правой части этого уравнения $\sum_i[\vec{R_i}\vec{f_i}] = 0$, так как в соответствии с третьим законом Ньютона силы взаимодействия между частицами (внутренние силы) действуют в противоположные стороны вдоль одной и той же прямой и равны по модулю. Их моменты относительно произвольной точки O равны по величине и противоположны по направлению. Поэтому моменты внутренних сил попарно уравновешивают друг друга, и сумма моментов всех внутренних сил для любой системы частиц всегда равна нулю.

Второе слагаемое в уравнении (I.4) $\sum_i[\vec{R_i}\vec{F_i}] = \vec{M}$ – есть полный момент внешних сил, действующих на тело. Значит,

$$\frac{d}{dt}\sum_i[\vec{R_i}\,m_i\vec{v_i}] = \vec{M} \qquad (I.5)$$

Величина $[\vec{R_i}\,m_i\vec{v_i}]$, т.е. векторное произведение радиуса-вектора $\vec{R_i}$ материальной точки на ее импульс $m_i\vec{v_i}$, называется м о м е н т о м и м п у л ь с а $\vec{L_i}$ этой материальной частицы относительно точки O.

$$\vec{L_i} = [\vec{R_i}\,m_i\vec{v_i}]$$

Вектор $\vec{L_i}$ направлен перпендикулярно к плоскости, проведенной через векторы $\vec{R_i}$ и $m_i\vec{v_i}$ и образует с ними правую тройку векторов (при наблюдении из конца $\vec{L_i}$ видно, что вращение по кратчайшему пути от $\vec{R_i}$ к $m_i\vec{v_i}$ происходит против часовой стрелки).

Векторная сумма моментов импульса $\vec{L_i}$ всех частиц тела отно-

* $\frac{d}{dt}[\vec{R_i}\,m_i\vec{v_i}] = \left[\frac{d\vec{R_i}}{dt}\,m_i\vec{v_i}\right] + \left[\vec{R_i}\,\frac{d}{dt}(m_i\vec{v_i})\right] = \left[\vec{R_i}\,\frac{d}{dt}(m_i\vec{v_i})\right]$,
потому что

$$\left[\frac{d\vec{R_i}}{dt}\,m_i\vec{v_i}\right] = [\vec{v_i}\,m_i\vec{v_i}] = 0,$$

как векторное произведение двух одинаково направленных векторов.

сительно точки O называется **моментом импульса тела** относительно этой точки.

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \left[\vec{R}_i m_i \vec{v}_i\right] \qquad (I.6)$$

С учетом (I.6) уравнение (I.5) принимает вид:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \qquad (I.7)$$

Таким образом, производная по времени от момента импульса тела относительно произвольного неподвижного начала равна геометрической сумме моментов всех приложенных к телу внешних сил относительно того же начала. Этот результат называется **основным законом динамики вращательного движения тела**.

Основное уравнение динамики вращательного движения (I.7) аналогично основному уравнению динамики поступательного движения ($\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$, где $\vec{P} = m\vec{v}$ - импульс тела) и поэтому уравнение (I.7) называют также вторым законом Ньютона для вращательного движения.

Из (I.7) вытекает, что при отсутствии внешних сил $d\vec{L}/dt = 0$. Следовательно, для замкнутой системы $\vec{L}$ постоянен. Это утверждение составляет содержание **закона сохранения момента импульса**: суммарный момент импульса всех материальных точек замкнутой системы относительно произвольного неподвижного начала остается постоянным.

Спроектировав все величины, входящие в уравнение (I.7), на направление оси Z, совпадающей с осью вращения тела, получим соотношение

$$\frac{d}{dt} L_z = M_z , \qquad (I.8)$$

где L_z - момент импульса тела относительно оси Z; M_z - момент внешних сил относительно этой оси.

Моментами импульса L_z и силы M_z относительно произвольной оси Z называют проекции на эту ось векторов $\vec{L}$ и $\vec{M}$ относительно точки, лежащей на рассматриваемой оси.

Из (I.8) следует, что в том случае, когда сумма моментов внешних сил относительно некоторой оси равна нулю, момент импульса тела относительно этой оси остается постоянным.

Если материальная точка вращается по окружности радиуса r (рис. I.4), то момент ее импульса относительно оси вращения O

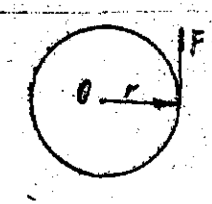

Рис. I.4

$$L = r m v = m r^2 \omega$$

так как $v = \omega r$, где ω - угловая скорость.

Если вокруг оси O вращается система материальных точек с одной и той же угловой скоростью ω, то $L = \sum_i m_i r_i^2 \omega$. Величину ω, как одинаковую для всех материальных точек, можно вынести из-под знака суммы. Тогда получится

$$L = J\omega , \qquad (I.9)$$

где $J = \sum_i m_i r_i^2$ - момент инерции тела относительно оси вращения.

С учетом (I.9) основное уравнение динамики для тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, можно представить в виде

$$\frac{d}{dt}(J\omega) = M , \qquad (I.10)$$

где M - момент внешних сил относительно оси вращения.

Если тело абсолютно твердое, то его момент инерции J не зависит от времени, и уравнение (I.10) можно записать так:

$$J\frac{d\omega}{dt} = M \qquad \text{или} \qquad J\varepsilon = M ,$$

где ε - угловое ускорение.

Сравнивая формулы основного закона динамики для поступательного движения $\vec{F} = \frac{dm\vec{v}}{dt}$ и вращательного - $\vec{M} = \frac{d(J\vec{\omega})}{dt}$, убеждаемся, что эти формулы похожи друг на друга. Только силе F, входящей в уравнение поступательного движения, соответствует момент силы в случае вращательного движения твердого тела, линейной скорости поступательного движения - угловая скорость вращающегося тела. В формулах для вращательного движения роль массы играет момент инерции J тела. Отсюда понятно, насколько важна роль момента инерции тела для изучения его вращательного движения.

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ

Моментом инерции материальной точки относительно некоторой оси называется скалярная величина J, равная произведению массы m этой точки на квадрат ее расстояния от оси: $J = mr^2$. Момент инерции тела относительно некоторой оси равен сумме моментов инерции всех элементов (точек) тела относительно той же оси

$$J = \lim \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \int r_i^2 \, dm = \int \rho r_i^2 \, dV, \qquad (2.1)$$

где r_i – расстояние элемента массы m_i от оси; ρ – плотность тела; dV – объем элемента массы m_i.

В качестве примера рассчитаем момент инерции однородного диска (цилиндра) относительно оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через его центр (рис. 2.1).

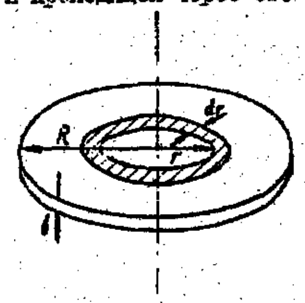

Рис. 2.1

Разобьем диск на кольцевые слои толщиной dr. Объем такого слоя равен $dV = b \cdot 2\pi r \, dr$, где b – толщина диска. Подставим выражение для dV в уравнение (2.1) и вынесем постоянные за знак интеграла:

$$J = 2\pi b \rho \int_0^R r^3 dr = \pi b \rho \frac{R^4}{2}$$

Учитывая, что произведение плотности диска ρ на его объем $\pi R^2 b$ равно массе диска, получим:

$$J = \frac{mR^2}{2}. \qquad (2.2)$$

Используя формулу (2.1), можно рассчитывать моменты инерции различных тел. Ниже приведены некоторые конечные результаты.

1. Момент инерции тонкого диска относительно оси, совпадающей с диаметром диска:

$$J = \frac{1}{4} mR^2. \qquad (2.3)$$

2. Момент инерции тонкого стержня длиной l относительно оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через его середину:

$$J = \frac{1}{12} ml^2. \qquad (2.4)$$

3. Момент инерции шара относительно оси, проходящей через его центр:

$$J = \frac{2}{5} mR^2 \qquad (2.5)$$

Из приведенных примеров видно, что момент инерции тела зависит от его массы, формы, размеров, а также от положения оси. Если ось вращения смещена по отношению к центру масс тела (рис. 2.2), то его момент инерции относительно этой оси можно определить, воспользовавшись теоремой Штейнера: момент инерции тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции J_0 относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела m на квадрат расстояния a между осями:

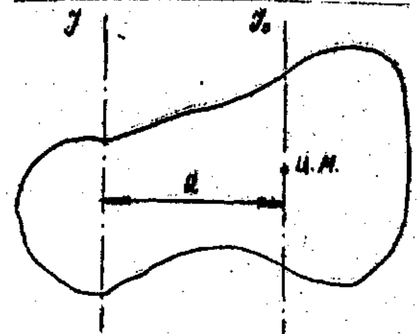

Рис. 2.2

$$J = J_0 + ma^2. \qquad (2.6)$$

Момент инерции относительно какой-то оси характеризует инертность тела при вращении вокруг этой оси, т.е. он является величиной, аналогичной массе тела, которая является мерой инертности тела при его поступательном движении.

Теоретический расчет моментов инерции тел произвольной формы сложен, поэтому их определяют опытным путем. Имеется много методов определения момента инерции. В настоящей работе используется метод крутильных колебаний.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТЕЛ МЕТОДОМ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Если тело (диск) А (рис. 3.1), укрепленное на пружине П, повернуть вокруг оси 00 на малый угол φ, то под действием сил упругости пружины возникнет вращающий момент сил M, пропорциональный φ:

$$M = -K\varphi, \qquad (3.1)$$

где K – коэффициент упругости.

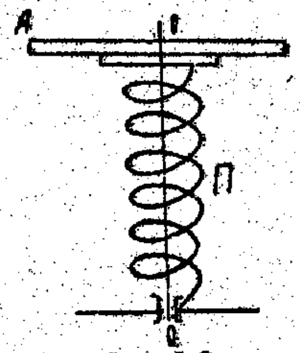

Рис. 3.I

Предоставим (после поворота) систему самой себе. Под действием момента упругих сил M диск A будет ускоренно двигаться к положению равновесия. При этом потенциальная энергия упруго деформированной пружины убывает, превращаясь во все возрастающую кинетическую энергию вращения диска. В положении равновесия деформация пружины исчезнет, но диск будет продолжать двигаться по инерции, и пружина деформируется в противоположном направлении, кинетическая энергия вращательного движения переходит в потенциальную энергию деформации пружины. Затем такой же процесс протекает при движении в обратном направлении. Система диск-пружина будет совершать крутильные колебания вокруг оси 00.

В соответствии с основным законом динамики вращательного движения

$$M = J\varepsilon = J\frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

где ε - угловое ускорение; J - момент инерции системы диск-пружина относительно оси 00.

Следовательно, уравнение движения диска:

$$J\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -k\varphi \qquad \text{или} \qquad J\frac{d^2\varphi}{dt^2} + k\varphi = 0. \qquad (3.2)$$

Введем обозначение $\omega^2 = \frac{k}{J}$, тогда уравнение (3.2) можно записать в виде

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega t + \alpha), \qquad (3.3)$$

т.е. диск совершает гармонические крутильные колебания около положения равновесия.

φ_0 - угловая амплитуда колебаний, α - начальная фаза, $\omega = \sqrt{\frac{k}{J}}$ - циклическая частота крутильных колебаний диска. Она связана с периодом колебаний диска соотношением

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Отсюда период крутильных колебаний системы

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{k}}. \qquad (3.4)$$

Если на диске A закрепить тело с моментом инерции J_x, то период колебаний системы изменится и станет равным

$$T_x = 2\pi\sqrt{\frac{J+J_x}{k}} \qquad (3.5)$$

Из уравнений (3.4) и (3.5) получаем формулу для определения момента инерции J_x тела, закрепленного на диске:

$$J_x = J\left[\left(\frac{T_x}{T}\right)^2 - 1\right], \qquad (3.6)$$

где J - момент инерции системы диск-пружина; T - период колебаний диска; T_x - период колебаний диска A с установленным на нем исследуемым телом.

Момент инерции J системы диск-пружина можно рассчитать по формуле (3.6), если использовать эталонное тело с известным моментом инерции.

ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ

З а д а н и е I. Определить момент инерции цилиндрического тела относительно оси симметрии.

I. Повернуть диск A (см. рис. 3.I) на небольшой угол и отпустить. Измерить период колебаний T диска.

2. Надеть на ось диска A цилиндрическое тело и измерить период колебаний T_x диска с расположенным на нем телом.

3. Используя измеренные значения T_x и T, рассчитать момент инерции J_x цилиндрического тела по формуле (3.6).

Вычислить момент инерции этого же тела по формуле $J = \frac{1}{2}mR^2$, где m - масса тела, R - его радиус.

Оценить в процентном отношении расхождение результатов измерения по формуле

$$\delta = \left|\frac{J - J_x}{J}\right| \cdot 100\,\%.$$