Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра физики

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ОТ МАССЫ ТЕЛА И ЕЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ ВРАЩЕНИЯ

Методические указания к лабораторной работе № 3
для студентов строительных специальностей

Минск 2006

УДК 531.38(075.8)
ББК 22.213.я7
И 88

Составители:
П.Г. Кужир, А.А. Баранов, А.П. Каравай

Рецензенты:
И.А. Сатиков, В.И. Кудин

В работе излагаются основы динамики поступательного и вращательного движения крестообразного маятника. Приведена методика экспериментального определения динамических характеристик.

Цель работы:

а) изучить основной закон динамики вращательного движения твердого тела;

б) исследовать зависимость момента инерции тел от распределения их массы относительно оси вращения.

1. МОМЕНТ СИЛЫ

Следует различать момент вектора силы относительно точки и относительно оси. Момент вектора силы относительно точки есть вектор. Момент того же вектора относительно оси есть проекция на эту ось его момента относительно любой точки, лежащей на той же оси. Таким образом, момент вектора силы относительно оси уже не является вектором. Проекция M_z есть скаляр (рис. 2, формула (4).

Пусть О – какая-либо точка, относительно которой рассматривается момент вектора силы (рис.1). Обозначим буквой $\vec{r}$ радиус-вектор, проведенный из этой точки к точке А приложения силы $\vec{F}$.

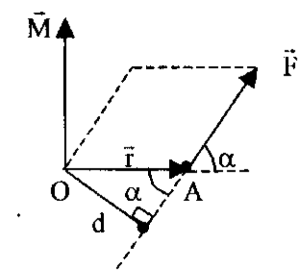


Рис. 1

Моментом $\vec{M}$ ***силы*** $\vec{F}$ ***относительно точки*** **0** называется векторное произведение радиуса-вектора $\vec{r}$ и силы $\vec{F}$:

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]. \qquad (1)$$

Момент силы есть вектор, направление которого определяется правилом правого винта: если винт вращать по кратчайшему пути от $\vec{r}$ к $\vec{F}$, то направление поступательного движения винта совпадает с направлением вектора момента силы $\vec{M}$. Вектор $\vec{M}$ всегда перпендикулярен к плоскости векторов $\vec{r}$ и $\vec{F}$.

Модуль вектора М, согласно определению векторного произведения, равен

$$M = r \cdot F \cdot \sin(\vec{r}, \vec{F}) = r \cdot F \cdot \sin\alpha = F \cdot d. \qquad (2)$$

Из рис. 1 видно, что $r \cdot \sin\alpha = d$. Кратчайшее расстояние d от точки, относительно которой определяется момент силы, до линии действия силы называется ***плечом силы***. Следовательно, модуль момента силы равен произведению силы на плечо.

Полный момент сил, действующих на систему материальных точек (частиц) равен векторной сумме моментов отдельных сил:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = \sum_{i=1}^{n} \left[\vec{r}_i, \vec{F}_i\right].$$

Способность силы вращать тело вокруг оси определяется моментом силы относительно данной оси.

Моментом силы относительно оси, проходящей через точку А, называется проекция момента $\vec{M}$ силы $\vec{F}$ относительно этой точки на данную ось.

Пусть внешняя сила $\vec{F}$ приложена к внешней точке тела С, находящейся на расстоянии R от оси вращения (рис. 2).

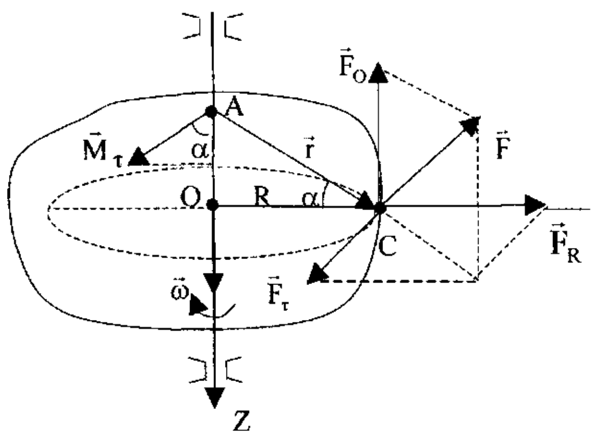


Рис. 2

Пусть ось вращения закреплена. Определим момент силы $\vec{F}$ относительно данной оси. Разложим вектор силы $\vec{F}$ на три взаимно перпендикулярные составляющие: $\vec{F}_O$, $\vec{F}_R$ и $\vec{F}_\tau$. Сила $\vec{F}_\tau$ направлена по

касательной к окружности, по которой движется рассматриваема точка С. Момент $\vec{M}$ силы $\vec{F}$ относительно точки А, лежащей на оси вращения, равен векторной сумме моментов составляющих сил:

$$\vec{M} = \vec{M}_O + \vec{M}_R + \vec{M}_\tau .$$

Векторы $\vec{M}_O$ и $\vec{M}_R$ перпендикулярны к оси Z, поэтому их проекция на ось Z равны нулю. Момент силы $\vec{M}_\tau$ равен: $\vec{M}_\tau = \left[\vec{r}, \vec{F}_\tau\right]$ и образует с осью Z угол α, а модуль $\vec{M}_\tau$ имеет значение:

$$M_\tau = r \cdot F_\tau \cdot \sin 90° = r \cdot F_\tau \qquad (3)$$

Проекция вектора $\vec{M}_\tau$ на ось Z равна моменту силы $\vec{F}_\tau$ относительно оси Z:

$$M_Z = M_\tau \cdot \cos\alpha = r \cdot F_\tau \cdot \cos\alpha = F_\tau \cdot R , \qquad (4)$$

так как, согласно рис.2, $R = r \cdot \cos\alpha$.

Следовательно, только составляющая $\vec{F}_\tau$, лежащая в плоскости, перпендикулярной к оси вращения, и перпендикулярная к радиусу R точки С приложения внешней силы, приводит к изменению вращательного движения тела.

2. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Выведем уравнение движения тела, имеющего закрепленную в пространстве ось вращения Z. Для этого мысленно разобьем тело на совокупность материальных точек (частиц) с массами $m_1, m_2, \ldots, m_i, \ldots m_n$. На i-ую точку действует в данный момент некоторая сила $\vec{F}_i$, которая представляет собой равнодействующую всех приложенных к этой частице сил. При вращении тела частица с массой m_i движется по окружности радиуса R_i (рис. 3). Моментом относительно оси вращения обладает только составляющая $\vec{F}_{\tau i}$ силы $\vec{F}_i$, лежащая в

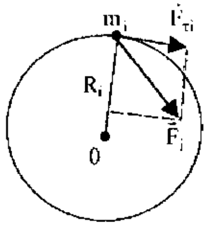


Рис. 3

плоскости, перпендикулярной оси вращения. По второму закону Ньютона ее численное значение равно

$$\vec{F}_{\tau i} = m_i \, \vec{a}_{\tau i}, \qquad (5)$$

где $\vec{a}_{\tau i}$ – тангенциальная (касательная) составляющая ускорения частицы.

Умножим обе части равенства (5) на R_i и выразим $a_{\tau i}$ через угловое ускорение β ($a_{\tau i} = \beta R_i$), тогда получим

$$F_{\tau i} R_i = m_i R_i^2 \beta$$

или

$$M_i = m_i R_i^2 \beta = J_i \, \beta, \qquad (6)$$

где M_i – момент, действующий на данную частицу тела, силы $\vec{F}_i$ относительно оси вращения, а произведение массы частицы на квадрат расстояния от нее до оси, т.е.

$$J_i = m_i R_i^2, \qquad (7)$$

называют ***моментом инерции частицы (материальной точки) относительно оси Z.***

Просуммируем выражение (6) по всем частицам:

$$\sum_{i=1}^{n} M_i = \sum_{i=1}^{n} J_i \beta .$$

Так как угловое ускорение β одинаково для всех частиц данного тела, его можно вынести за знак суммы

$$\sum_{i=1}^{n} M_i = \beta \sum_{i=1}^{n} J_i . \qquad (8)$$

Алгебраическую сумму моментов всех внешних сил $\sum_{i=1}^{n} M_i = M$, действующих на тело, называют ***полным моментом внешних сил.*** Сумма моментов инерции отдельных частиц, составляющих тело, $\sum_{i}^{n} J_i = J$ называется ***моментом инерции тела относительно заданной оси вращения.***

Следовательно, уравнение (8) примет вид:

$$M = J\beta. \qquad (9)$$

Уравнение (9) называют ***основным уравнением динамики вращательного движения***: момент внешней силы, приложенной к телу, относительно оси, равен произведению момента инерции твердого тела относительно неподвижной оси вращения умноженному на угловое ускорение.

3. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ТЕЛА

Момент инерции – это физическая величина, которая существует независимо от того, вращается тело или нет. Величина момента инерции тела относительно данной оси зависит от размеров тела, его формы, плотности.

Для неоднородных тел и тел неправильной геометрической формы момент инерции определяется экспериментально, а для однородных тел геометрически правильной формы – посредством интегрирования:

$$I = \int R^2 \, dm = \int \rho R^2 \, dV, \qquad (10)$$

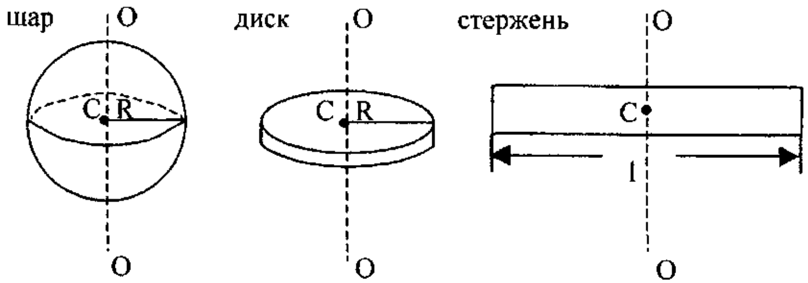
где $\rho = \frac{dm}{dV}$ – плотность тела, V – его объем. В системе СИ момент инерции J измеряется в **кг · м²**.

Уравнение (9) аналогично второму закону Ньютона ($\vec{F} = m \cdot \vec{a}$). Роль массы в уравнении (9) играет момент инерции, чем больше момент инерции, тем меньше (при прочих равных условиях) угловое ускорение, т.е. имеет место аналогия момента инерции с массой. ***Момент инерции тела есть мера инертности тела во вращательном движении.***

Центр масс (центр инерции) тела есть точка с координатами

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

Расчет интеграла (10) для некоторых однородных тел относительно оси, проходящей через их центр масс, дает следующие результаты:



$J_C = \frac{2}{5} mR^2$ $\qquad$ $J_C = \frac{1}{2} mR^2$ $\qquad$ $J_C = \frac{1}{12} ml^2$

Рис. 4

Здесь центр масс C совпадает с геометрическим центром приведенных фигур.

Если ось вращения не проходит через центр масс тела, то можно воспользоваться ***теоремой Штейнера***: момент инерции тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции относительно

оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела (J_c), и произведения массы тела на квадрат расстояния d между осями:

$$J = J_c + md^2. \tag{11}$$

На рис. 5 показан шар. Требуется определить его момент инерции относительно оси O′O′, находящейся на расстоянии d = 3R от центра инерции шара:

$$J = \frac{2}{5} mR^2 + m(3R)^2 = \\ = mR^2\left(\frac{2}{5} + 9\right) = \frac{47}{5} mR^2. \tag{12}$$

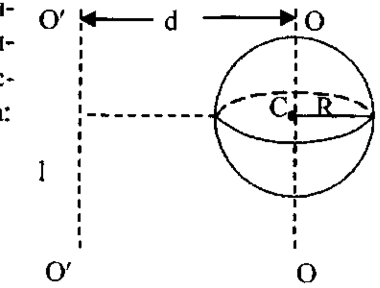


Рис. 5

4. ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ И ВЫВОД РАБОЧЕЙ ФОРМУЛЫ

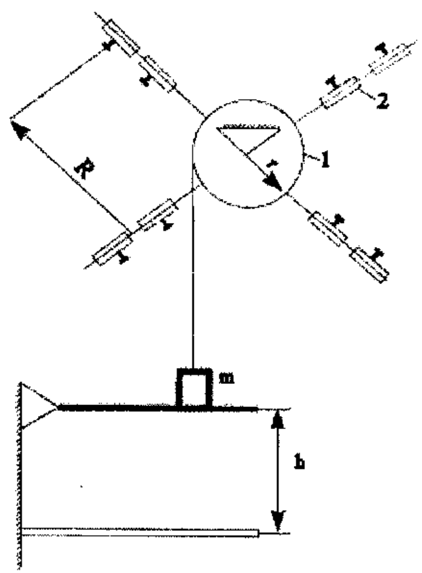


Рис. 6

Прибор для исследования зависимости момента инерции от массы тела и распределения ее относительно оси вращения (маятник Обербека) представляет собой вращающийся вокруг горизонтальной оси крестообразный маховик. Он состоит из цилиндрического вала 1 с четырьмя взаимноперпендикулярными стержнями 2 (рис. 6). На стержни можно надевать и закреплять на разных расстояниях от оси вращения одинаковой массы грузы, что приводит к изменению момента инерции маятника. На вал наматывается нить с привязанным к ней грузом m. В верхнем положении груз удерживается электромагнитом или располагается на площадке, которая удерживается электромагнитом в горизонтальном положении. При размыкании цепи электромагнита груз начинает опускаться, вызывая равноускоренное вращательное движение маховика.

На вращающийся маховик действует момент М силы натяжения нити и момент $M_{тр}$ силы трения, причем последний тормозит вращение. Уравнение движения маховика записывается так:

$$M - M_{тр} = I\beta, \quad (13)$$

где β – угловое ускорение маховика, I – его момент инерции.

Полный момент сил, действующих на маховик, можно считать постоянным, поэтому вращение маховика будет равноускоренным.

Момент М силы натяжения нити F, приложенной к валу маховика, относительно оси вращения равен

$$M = Fr,$$

где r – радиус вала.

Сила натяжения F нити находится из второго закона Ньютона для опускающегося груза. Под действием силы тяжести P = mg и силы натяжения, направленной вертикально вверх, груз опускается равноускоренно, так что

$$P - F = ma,$$

где m – масса опускающегося груза, a – его ускорение.

Отсюда сила натяжения нити равна

$$F = P - ma = m(g - a),$$

а момент силы F

$$M = m(g - a)r, \quad (14)$$

где g – ускорение свободного падения.

Ускорение опускающегося груза:

$$a = \frac{2h}{t^2}, \quad (15)$$

где h – расстояние, которое проходит опускающийся груз, t – время движения опускающегося груза.

Подставив (15) в (14), получим выражение для момента силы натяжения нити

$$M = m\left(g - \frac{2h}{t^2}\right)r. \quad (16)$$

Момент силы трения можно найти, исходя из следующих соображений. Как только опускающийся на нити груз коснется нижней площадки, дальнейшее вращение маховика происходит при действии только тормозящего момента сил трения, и уравнение движения маховика теперь запишется так:

$$M_{тр} = I\beta_1 \quad (17)$$

или

$$M_{тр} = I\frac{\omega_1}{\tau}, \quad (18)$$

где β_1 – угловое ускорение маховика, ω_1 – максимальная угловая скорость маховика, τ – время вращения маховика после прекращения действия момента силы натяжения нити.

Угловую скорость ω_1 выразим через касательное ускорение точек на ободе вала $a_r = \beta_1 r$ или

$$\omega_1 = \frac{a_\tau t}{r}, \quad (19)$$

где t – время движения опускающегося груза. Касательное ускорение равно ускорению опускающегося груза a, т.е.

$$a_\tau = a = \frac{2h}{t^2},$$

значит,

$$\omega_1 = \frac{2h}{rt}. \tag{20}$$

Подставим значение ω_1 в (18):

$$M_{тр} = I\frac{2h}{r\tau t}. \tag{21}$$

Угловое ускорение маховика при действии момента сил $M - M_{тр}$ равно

$$\beta = \frac{a_\tau}{r} = \frac{2h}{rt^2}. \tag{22}$$

Уравнение движения маховика (13) с учетом (16), (21) и (22) примет вид

$$m\left(g - \frac{2h}{t^2}\right)r - I\frac{2h}{r\tau t} = I\frac{2h}{rt^2}. \tag{23}$$

Из (23) находим момент инерции маховика

$$I = \frac{m\left(\frac{gt^2}{2h} - 1\right)r^2}{1 + \frac{t}{\tau}}. \tag{24}$$

5. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое момент силы относительно точки, оси? Пояснить рисунками.
2. Вывести основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела.
3. Дайте определение центра масс тела.
4. Что такое момент инерции тела относительно некоторой оси?
5. Сформулировать теорему Штейнера.
6. Как рассчитать момент силы натяжения нити в данной работе?
7. Как рассчитать момент силы трения?