Составители: Р.А. Барташевич
П.Г. Кужир
В.А. Самойлюкович

Цель работы:
1. Изучить законы динамики вращательного движения материальной точки и твердого тела.
2. Измерить скорость пули баллистическим методом.

Приборы и принадлежности: баллистический маятник и частотомер.

§ 1. МОМЕНТ СИЛЫ И МОМЕНТ ИМПУЛЬСА ОТНОСИТЕЛЬНО НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ.

Важные законы механики связаны с понятием момента импул са и момента силы. Следует различать моменты этих векторов о носительно точки и относительно оси. Момент вектора относ тельно точки и относительно оси - разные понятия, хотя и связа ные между собой.

Момент вектора относительно точки сам есть вектор.

Момент того же вектора относительно оси есть проекция на ось его момента относительно точки, лежащей на той же оси. С довательно, момент импульса относительно оси уже не являет вектором.

$$\vec{M} = [\vec{r} \cdot \vec{F}]$$

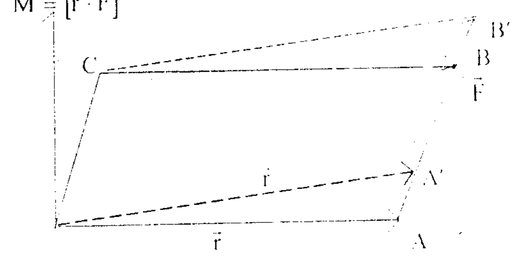

Рис. 1.

Пусть 0 – какая-либо точка, относительно которой рассматри ется момент вектора силы $\vec{F}$ или вектора импульса $\vec{p}$. Ее называ

началом или полюсом. Обозначим буквой $\vec{r}$ радиус-вектор, пр
денный из этой точки к точке приложения силы $\vec{F}$.

Моментом силы $\vec{F}$ относительно точки 0 называется векторн
произведение радиуса вектора $\vec{r}$ на силу $\vec{F}$. Рис.1.

$$\vec{M} = \left[\vec{r} \cdot \vec{F}\right] \qquad (1)$$

Из этого определения непосредственно следует, что момент
не изменится, если точку приложения силы F перенести в любу
другую точку, расположенную на линии действия силы. Действ
тельно, если точку приложения силы F перенести из A в A', то п
раллелограмм OABC перейдет в параллелограмм OA'B'C. Оба п
раллелограмма имеют общее основание и общую высоту. Поэто
их площади равны, что и доказывают наши утверждения.

Если $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, то

$$\left[\vec{r} \cdot \vec{F}\right] = \left[\vec{r} \cdot \vec{F}_1\right] + \left[\vec{r} \cdot \vec{F}_2\right] \qquad (2)$$

Это значит, что момент равнодействующей нескольких сил от
носительного некоторого начала координат равен геометрическ
сумме моментов составляющих сил относительного этого же нач
ла.

Моментом импульса материальной точки относительно н
чала координат 0 называется векторное произведение радиу
вектора, проведенного из этого начала до материальной точк
на импульс материальной точки. (Рис.2)

$$\vec{L} = \left[\vec{r} \cdot \vec{p}\right] \qquad (3)$$

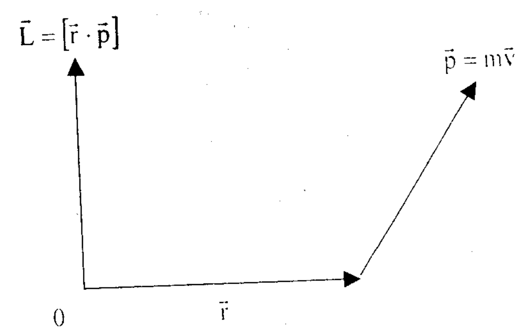

Рис.2.

Предположим, что начало координат 0 неподвижно. **Диффе-
ренцируя** выражение (3) по времени получим

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}\vec{p}\right] + \left[\vec{r}\,\frac{d\vec{p}}{dt}\right].$$

Так как по предположению начало координат 0 неподвижно, то **производная** $\frac{d\vec{r}}{dt}$ есть скорость материальной точки, связанная с ее **импульсом** соотношением $\vec{p} = m\vec{v}$. Поэтому первое слагаемое рав**но** нулю, как векторное произведение колениарных векторов $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ и $\vec{p} = m\vec{v}$.

Второе слагаемое можно преобразовать с помощью второго за**кона Ньютона** $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$. Тогда получим уравнение моментов

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\vec{r} \cdot \vec{F}\right] \qquad (4)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \qquad (5)$$

Производная по времени момента импульса материальной точки **относительно неподвижного** начала координат равна моменту дей**ствующей силы** относительно этого же начала.

Уравнение моментов (5) можно обобщить на случай произвольной системы точек.

Производная по времени от момента импульса системы материальных точек относительно произвольного неподвижного начала координат равна геометрической сумме моментов всех внешних сил относительно этого же начала.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i \qquad (6)$$

Если момент внешних сил относительно неподвижного начала координат равен нулю, то момент импульса системы относительно того же начала остается постоянным во времени. Это положение называется **законом сохранения момента импульса.**

Важным является случай центральных сил, когда направление всех сил, действующих на материальные точки системы, проходят через неподвижный центр 0. Момент таких сил относительно точки 0 равен нулю.

Наряду с законом сохранения импульса и энергии закон сохранения момента импульса является одним из важнейших фундаментальных законов физики.

Момент силы и момент импульса зависят не только от величины и направления силы и импульса, но и от положения начала координат.

§ 2. МОМЕНТ ИМПУЛЬСА И МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТЕЛА.

Векторное уравнение (5) эквивалентно трем скалярным уравнениям

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x, \quad \frac{dL_y}{dt} = M_y, \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z \qquad (7)$$

которые получаются из уравнения (5) путем проектирования на неподвижные оси декартовой системы координат с началом в точке 0.

Величины L_x, L_y, L_z, M_x, M_y, M_z называются моментами импульса и моментами силы относительно координатных осей x, y, z соответственно.

Вообще, моментами импульса L_x и силы M_x относительно произвольной оси x называют проекцией вектора $\vec{L}$ и $\vec{M}$ на эту ось в предположении, что начало 0 лежит на этой оси.

Из (7) следует, что когда **момент внешних сил относительно какой-либо неподвижной оси x равен нулю, то момент импульса системы относительно той же оси остается постоянным.** Это – **закон сохранения момента импульса относительно неподвижной оси.**

Назовем плечом силы относительно некоторой оси, проходящей через точку 0 ⊥ рис. 3 кратчайшее расстояние между осью и линией действия силы (рис. 3) тогда

$$M_x = Fd.$$

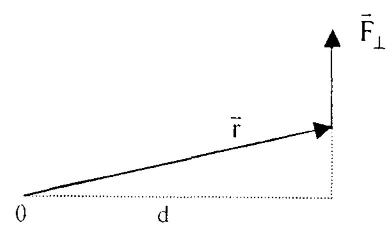

Рис. 3

Момент силы относительно оси - это произведение перпендикулярной составляющей силы $F_\perp$ относительно оси на плечо d.

Аналогично момент импульса материальной точки относительно оси можно определить как произведение перпендикулярной к оси составляющей импульса на плечо.

Применим уравнение моментов относительно оси к рассмотрению вращательного движения. За неподвижную ось моментов удобно выбрать ось вращения.

Если материальная точка вращается по окружности радиуса r r_i (рис. 4), то момент ее импульса относительно оси вращения равен:

$$L_i = m v_i r_i.$$

Пусть ω - угловая скорость вращения, тогда $v_i = \omega r_i$ следовательно,

$$L_i = m r_i^2 \omega .$$

Обозначим $I_i = m r_i^2$.

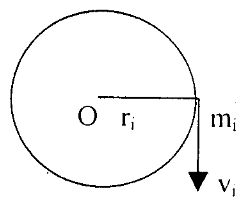

Рис. 4

Величина I, равная произведению массы материальной точки на квадрат ее расстояния до оси вращения, называется моментом инерции материальной точки относительно этой оси.

Если вокруг оси 0 вращается система материальных точек с одной и той же угловой скоростью ω, то $L = \sum_{i=1}^{n} m r_i^2 \omega$, где суммирование производится по всем материальным точкам системы. Величину ω как одинаковую для всех материальных точек нужно вынести за знак суммы. Тогда получим:

$$L = I\omega , \qquad (8)$$

где $I = \sum_{i=1}^{n} m r_i^2$.

Величина I – момент инерции системы относительно оси - равна сумме произведений масс материальных точек на квадраты расстояний их до оси вращения.

Уравнение (8) показывает, что при вращении системы момент ее импульса относительно оси вращения равен произведению момента инерции системы относительно той же оси на угловую скорость. Из (7) и (8) следует

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(I\omega) = M , \qquad (9)$$

где M - момент внешних сил относительно оси вращения.

Производная момента импульса системы относительно оси по времени равна моменту внешних сил относительно этой же оси вращения.

Это основное уравнение динамики вращательного движения вокруг неподвижной оси. Оно напоминает уравнение Ньютона для движения материальной точки. Роль массы m играет момент инерции I, роль скорости - угловая скорость ω, роль силы F - момент силы M, роль импульса mv - момент импульса L.

Если момент внешних сил M относительно оси вращения равен нулю, то момент импульса сохраняется.

Следует иметь в виду, что сохраняется неизменным произведение ωI. При изменении I будет соответственно изменяться ω.

Важным частным случаем является вращение неизменной системы материальных точек или твердого тела вокруг неподвижной оси. В этом случае момент инерции I остается постоянным и уравнение (9) переходит в уравнение

$$I\frac{d\omega}{dt} = M \qquad I\varepsilon = M \qquad (10)$$

Произведение момента инерции твердого тела относительно неподвижной оси вращения на угловое ускорение $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ равно моменту внешних сил относительно той же оси. Это основное уравнение динамики для вращательного движения твердого тела.

Аналогия между движением материальной точки и вращением твердого тела относительно неподвижной оси может быть прослежено дальше. Если материальная точка вращается по окружности, то элементарная работа при повороте на угол $d\varphi$ равна

$$dA = FdS = Fr\,d\varphi = M\,d\varphi.$$

Такое же выражение получится и для твердого тела, так как его можно рассматривать как систему материальных точек, вращающихся с общей угловой скоростью ω:

$$dA = M\,d\varphi \tag{11}$$

Роль силы играет момент внешних сил, роль линейного перемещения - угловое перемещение.

Кинетическая энергия вращающегося твердого тела представляется в виде:

$$K = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\omega r_i\right)^2 = \frac{\omega^2}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{L^2}{2I} \tag{12}$$

Это выражение напоминает соответствующую формулу для кинетической энергии материальной точки. Она получается формаль ной заменой $m \to I$, $v \to \omega$.

КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Гармонические крутильные или торсионные колебания сове шает тело, подвешенное на упругой нити. Уравнение вращатель го движения тела вокруг вертикальной оси, проходящей через точку подвеса, имеет вид:

$$I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = M \tag{13}$$

где φ - угол поворота тела вокруг вертикальной оси в результате удара пули, I - момент инерции относительно той же оси, а M - момент упругой силы относительно той же оси, действующей со стороны закрученной на угол φ нити. При малых φ этот момент пропорционален деформации, т.е.

$$M = -k\varphi \tag{14}$$

где k - модуль кручения, зависит от размеров и упругих свойств материала нити и численно равен моменту упругих сил при закручивании проволоки на 1 радиан.

В этом случае уравнение движения

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{k}{I}\varphi \tag{15}$$

Если тело закрутить на некоторый угол и затем предоставить ему возможность двигаться, то оно будет совершать вокруг вертикальной оси гармонические торсионные колебания с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}} \tag{16}$$

Потенциальная энергия упругой деформации при крутильных колебаниях

$$W_п = \frac{1}{2}k\varphi^2 \tag{17}$$

ИЗМЕРЕНИЕ СКОРОСТИ ПУЛИ С ПОМОЩЬЮ КРУТИЛЬНОГО БАЛЛИСТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Прямое измерение скорости пули является сложной экспериментальной задачей. Поэтому для ее решения используются различные косвенные методы измерения. Один из таких методов - это метод с использованием крутильного баллистического маятника.

Горизонтально летящая пуля массы m попадает в маятник (цилиндр, наполненный пластилином) и застревает в нем. Имеет место абсолютно неупругий удар. Маятник начинает совершать крутильные колебания вокруг вертикальной оси.

Для этого случая запишем закон сохранения момента импульса

$$mvr = (I_2 + mr^2)\omega \qquad (18)$$

где m - масса пули, v - скорость пули, r - расстояние от оси вращения до точки удара пули, I_1 - момент инерции маятника;

Закон сохранения энергии

$$\frac{1}{2}\left(I_2 + mr^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2}k\varphi^2 \qquad (19)$$

Из (18) и (19) получаем

$$v^2 = \frac{k\varphi^2}{m^2r^2}\left(I_2 + mr^2\right) \qquad (20)$$

Так как $mr^2 \ll I_2$, то mr^2 в (20) можно пренебречь. Тогда получим

$$v = \frac{\varphi}{rm}\sqrt{kI_2} \qquad (21)$$

Запишем выражения для периода колебаний и момента инерции при двух различных расстояниях грузиков от оси маятника R_1 и R_2.

$$\begin{cases} T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{I_1}{k}} \\ T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{I_2}{k}} \end{cases} \qquad (22) \qquad\qquad \begin{cases} I_1 = I_o + 2MR_1^2 \\ I_2 = I_o + 2MR_2^2 \end{cases} \qquad (23)$$

Здесь I_o - момент инерции маятника без грузиков, M - масса одного грузика, который в данной задаче можно рассматривать как материальную точку.

Из (22) получаем

$$k = 4\pi^2 \frac{I_1}{T_1^2} \qquad (24)$$

$$I_1 = \frac{T_2^2}{T_2^2 - T_1^2}\left(I_2 - I_1\right) \qquad (25)$$

Из (23) получаем

$$I_2 - I_1 = 2M(R_2^2 - R_1^2) \qquad (26)$$

Подставим (24) и (25) в (21). Получим окончательную формулу для определения скорости пули

$$v = \frac{4\pi\varphi M}{rm} \cdot \frac{T_2}{T_2^2 - T_1^2}\left(R_2^2 - R_1^2\right) \qquad (27)$$

Перейдем от радиальной меры угла к градусной $\varphi = \frac{\pi\alpha}{180}$, где α - значение угла φ в градусах. Окончательно имеем

$$v = \frac{\pi^2\alpha MT_2\left(R_2^2 - R_1^2\right)}{45rm\left(T_2^2 - T_1^2\right)} \qquad (28)$$

где α - угол в градусах, на который закручивается нить после попадания в маятник пули.

Из полученного выражения видно, что для определения скорости пули необходимо измерить:

1) период колебаний T_1 и T_2 при двух различных расстояниях грузиков от оси маятника R_1 и R_2;

2) угол наибольшего отклонения α от положения равновесия после удара пули;

3) расстояние r от места внедрения пули до нити подвеса.

Масса грузика M и пули m известны.