Министерство высшего образования Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ

УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра физики

Методические указания к лабораторной работе

«ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ»

для студентов всех видов обучения

Минск
УП «Технопринт»
2002

УДК 531.6 (075.8)

В работе рассматриваются законы сохранения в механике. На основе законов сохранения энергии и импульса исследуется упругий удар шаров.

Составили:

А.А. Баранов, А.П.Каравай, П.Г.**Кужир.**

Рецензент:
И.А.Сатиков.

Артур Александрович БАРАНОВ
Алексей Павлович КАРАВАЙ
Павел Григорьевич КУЖИР

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к лабораторной работе
"**Изучение** законов сохранения в **механике**"
для студентов всех видов обучения

Цель работы: Изучить законы сохранения в механике и на их основании исследовать упругий удар шаров.

1. Закон сохранения импульса

Рассмотрим систему n материальных частиц (точек). Силы, действующие между частицами, образующими систему, называются **внутренними**. Прочие силы называются **внешними**. Система называется **замкнутой (изолированной)**, если внешние силы отсутствуют.

Импульсом $\vec{p}_i$ i-ой частицы с массой m_i и скоростью $\vec{v}_i$ называется произведение ее массы на скорость $\vec{p}_i = m_i\vec{v}_i$.

Пусть на i-ую частицу системы действуют внешние силы с равнодействующей $\vec{F}_i$ и внутренние силы $\vec{f}_{ik}$. По второму закону Ньютона уравнение движения для i-ой частицы запишем:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i + \sum_{k\neq i}\vec{f}_{ik} . \qquad (1)$$

Здесь условие $k \neq i$ означает, что нет самодействия, т.е.

$$\vec{f}_{11} = \vec{f}_{22} = \ldots = 0 .$$

Просуммируем уравнение (1) по i от 1 до n, тогда получим

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i \qquad (i = 1,2,3,\ldots,n). \qquad (2)$$

В (2) учтено, что сумма $\sum_{i=1}^{n}\sum_{k\neq i}^{n}\vec{f}_{ik} = 0$, поскольку в силу третьего закона Ньютона $\vec{f}_{ik} = -\vec{f}_{ki}$ и слагаемые суммы попарно уничтожаются.

Импульсом $\vec{P}$ **системы** материальных частиц называется векторная сумма импульсов $\vec{p}_i$ отдельных частиц

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i \ .$$

Тогда уравнение (2) примет вид

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \ , \qquad (3)$$

т.е. производная по времени от вектора импульса системы равна векторной сумме всех внешних сил, приложенных к системе.

Для замкнутой системы, когда внешние силы отсутствуют ($\vec{F}_i = 0$), получаем $d\vec{P}/dt = 0$ и приходим к **закону сохранения импульса:**

$$\vec{P} = \text{const} \ , \qquad (4)$$

т.е. **импульс замкнутой системы материальных частиц сохраняется.**

2. Закон сохранения момента импульса

Пусть частица массой m_i движется по окружности постоянного радиуса r_i относительно точки O (рис. 1). Скорость частицы $\vec{v}_i$ и ее импульс $\vec{p}_i$ в данный момент времени перпендикулярны к r_i.

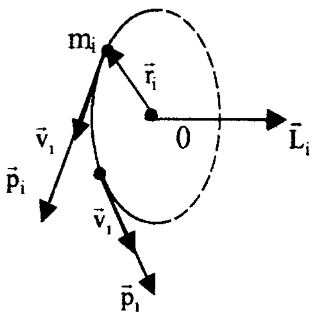

Рис. 1.

Момент импульса $\vec{L}_i$ материальной точки (частицы) относительно точки O определяется как векторное произведение

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i, \vec{p}_i].$$

Вектор $\vec{L}_i$ направлен от центра окружности O перпендикулярно плоскости окружности в сторону поступательного движения *правого винта*, который вращается в направлении вращения вектора $\vec{p}_i$.

Изменение момента импульса частицы определяется изменечием ее импульса и, учитывая второй закон Ньютона, найдем

$$dL_i = r_i dp_i = r_i F_i dt = M_i dt$$

или

$$\vec{M}_i = \frac{d\vec{L}_i}{dt} \ , \qquad (5)$$

где $\vec{M}_i$ – **момент силы относительно точки O.**

$$\vec{M}_i = [\vec{r}_i, \vec{F}_i]$$

Элементарная работа dA_i, совершаемая над частицей при повороте ее на угол $d\varphi$, когда частица перемещается на $d\ell_i$ под действием силы F_i (см. рис. 2), равна

$$dA_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{\ell}_i \ .$$

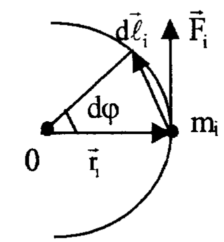

Рис. 2.

Поскольку $d\ell_i = r_i \cdot d\varphi$, а модуль момента силы равен $M_i = F_i r_i$, то получаем

$$dA_i = F_i \cdot r_i \cdot d\varphi = M_i \cdot d\varphi \ .$$

Это соотношение обобщается и на систему материальных частиц.

Теперь рассмотрим систему, состоящую из n частиц. **Моментом импульса такой системы относительно точки O** называют векторную сумму моментов импульсов частиц, составляющих систему:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i \ .$$

Просуммируем выражение (5) по всем частицам, входящим в систему:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i\right) = \frac{d}{dt}\vec{L}, \qquad (6)$$

где $\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_i$ представляет собой результирующий момент всех внешних сил, приложенных к системе. Векторная сумма моментов внутренних сил равна нулю, так как эти моменты попарно компенсируются.

Если $\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_i = 0$, то равенство (6) примет вид $\frac{d}{dt}\vec{L} = 0$, откуда для замкнутой системы имеем:

$$\vec{L} = \text{const}. \qquad (7)$$

Равенство (7) выражает **закон сохранения момента импульса: момент импульса замкнутой системы материальных частиц относительно любой неподвижной точки остается постоянным.**

Если тело (или система материальных частиц) вращается вокруг неподвижной оси OZ, то уравнение движения тела имеет вид:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z, \qquad (8)$$

где L_z и M_z – составляющие момента импульса тела и результирующего момента внешних сил относительно оси OZ.

Если в соотношении (8) момент внешних сил относительно неподвижной оси вращения тела равен нулю ($M_z = 0$), то момент импульса тела относительно этой оси не изменяется **в** процессе движения

$$\frac{dL_z}{dt} = 0 \quad \text{и} \quad L_z = \text{const}. \qquad (9)$$

Соотношение (9) представляет закон сохранения момента импульса относительно неподвижной оси.

Закон (9) может быть обобщен на любую **незамкнутую** систему тел: если результирующий момент внешних сил, приложенных к системе, относительно какой-либо неподвижной оси равен нулю, то момент импульса системы относительно этой оси не изменяется

с течением времени. В частности, этот закон справедлив и для **замкнутой** системы тел.

3. Кинетическая и потенциальная энергия механической системы

Механическая энергия это физическая величина, характеризующая способность тела или системы тел совершать работу. С другой стороны, работа есть мера изменения энергии.

Если энергия связана с движением системы или ее частей, то она называется **кинетической**. Различают кинетическую энергию поступательного и вращательного движения. Элементарная работа dA силы $\vec{F}$ на бесконечно малом перемещении $d\vec{r}$ равна: $dA = \vec{F}\,d\vec{r}$. Интегрируем это равенство на участке между двумя произвольными точками 1 и 2:

$$A_{12} = \int_1^2 dA = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r}. \qquad (10)$$

Поскольку скорость определяется выражением $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, то из равенства (10) с учетом второго закона Ньютона найдем

$$A_{12} = \int_1^2 \frac{d\vec{p}}{dt}d\vec{r} = \int_1^2 \vec{v}\,d\vec{p}.$$

Из тождества $\vec{v}^2 = v^2$ следует, что $\vec{v}d\vec{v} = v\,dv$. Тогда $\vec{v}\,d\vec{p} = m\vec{v}\,d\vec{v} = mv\,dv$ и последнее равенство принимает вид:

$$A_{12} = m\int_{v_1}^{v_2} v\,dv = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = T_2 - T_1,$$

где физическая величина, равная $T_i = \frac{m v_i^2}{2}$ (i = 1 или 2) – есть **кинетическая энергия поступательного движения тела** или материальной частицы в положении 1 или 2.

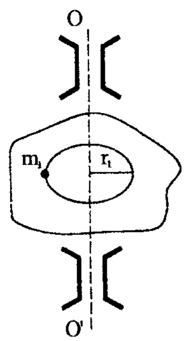

Рис. 3.

Рассмотрим кинетическую энергию вращательного движения тела (рис. 3). Пусть тело вращается с угловой скоростью ω вокруг оси OO'. Разобьем тело на малые частицы с массой m_i и учтем связь угловой и линейной скоростей ($v_i = \omega r_i$). Тогда кинетическая энергия i-той частицы будет равна

$$T_i = \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2}\omega^2 m_i r_i^2 .$$

Просуммируем по всем частицам

$$T = \sum_{i=1}^{n} T_i = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \frac{J\omega^2}{2},$$

где $J = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$ – момент инерции тела, относительно данной оси вращения. Физическая величина, равная $T = J\omega^2/2$ – **есть кинетическая энергия вращательного движения тела**.

Потенциальной энергией U называется механическая энергия, обусловленная взаимным расположением системы тел или ее частей, а также характером их взаимодействия.

Понятие потенциальной энергии можно ввести лишь, если на систему материальных частиц (точек) или внутри нее действуют **консервативные** силы. Сила, действующая на материальную частицу или систему материальных частиц, называется **консервативной**, если работа этой силы не зависит от формы траектории, по которой материальная частица или система перемещается из одного положения в другое. Эта работа зависит лишь от начального и конечного положений перемещаемой материальной частицы или системы. Консервативными силами в механике являются сила тяготения и сила упругости. Неконсервативными силами являются силы трения и силы сопротивления, работа которых зависит от формы пути.

Работа A_{12}, совершаемая консервативными силами при изменении конфигурации системы, т.е. расположения всех ее частей по отношению к системе отсчета, не зависит от того, как было осуществлено это изменение при переводе системы из начальной конфигурации (1) в конечную конфигурацию (2). Работа A_{12} полностью определяется начальной и конечной конфигурацией системы, т.е.

$$A_{12} = U_1 - U_2, \qquad (11)$$

где U_1 и U_2 – потенциальная энергия системы в положении (1) и (2).

Из соотношения (11) следует, что работа консервативных сил, действующих на механическую систему, равна убыли потенциальной энергии системы.

При бесконечно малом изменении конфигурации системы

$$dA = -dU . \qquad (12)$$

Полная механическая энергия E такой системы равна сумме ее кинетической и потенциальной энергий

$$E = T + U .$$

4. Закон сохранения энергии в механике

Рассмотрим систему из n материальных частиц. Пусть m_i и v_i – масса и скорость i-той частицы. Обозначим через f_{ik} внутреннюю консервативную силу, действующую на i-ую частицу со стороны k-той частицы, через $\vec{F}_i$ обозначим равнодействующую внешних консервативных сил, действующую на i-ую частицу, и через $\vec{F}_i^*$ – равнодействующую внешних неконсервативных сил, действующую на i-ую частицу.

Согласно второму закону Ньютона запишем уравнение движения для i-ой частицы:

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_{i \neq k} \vec{f}_{ik} + \vec{F}_i + \vec{F}_i^* .$$

Умножим это уравнение на $d\vec{r}_i = \vec{v}_i dt$ и просуммируем по $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \, d\vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{i \neq k}^{n} \vec{f}_{ik} \right) d\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \, d\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^* \, d\vec{r}_i . \qquad (13)$$

Левая часть уравнения (13) есть приращение кинетической энергии системы

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \, d\vec{v}_i = d\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2} \right) = dT .$$

Первое слагаемое в правой части уравнения (13) **есть убыль** потенциальной энергии взаимодействия частиц:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j \neq k} \vec{f}_{ik} \right) d\vec{r}_i = -dU_{вз} .$$

Второе слагаемое в правой части уравнения (13) есть убыль потенциальной энергии системы во внешнем поле консервативных сил

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \, d\vec{r}_i = -dU_{внеш} = dA_{внеш} .$$

Последнее слагаемое в правой части уравнения (13) есть работа внешних неконсервативных сил

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^* \, d\vec{r}_i = \delta A_{внеш}^* .$$

Следовательно, уравнение (13) можно записать в виде:

$$d(T + U_{вз}) = dA_{внеш} + \delta A_{внеш}^* . \qquad (14)$$

Уравнение (14) выражает закон изменения энергии. Если внешних сил нет или они компенсируют друг друга, то система является замкнутой, и выражение (14) принимает вид:

$$E = T + U_{вз} = \text{const} , \qquad (15)$$

т.е. **полная механическая энергия замкнутой системы остается постоянной с течением времени, если внутри системы действуют только консервативные силы – формулировка закона сохранения энергии в механике.**

Если на систему действуют только внешние консервативные силы, и нет неконсервативных сил, то равенство (14) можно представить в виде:

$$d(T + U_{вз}) = -dU_{внеш} \quad \text{или} \quad d(T + U_{вз} + U_{внеш}) = 0 .$$

Откуда

$$E = T + U_{вз} + U_{вн} = \text{const} , \qquad (16)$$

т.е. **полная механическая энергия системы, где действуют только консервативные силы, (как внутренние, так и внешние), не меняется с течением времени.**

5. Упругий и неупругий удар

Под **столкновением** частиц или тел понимается их кратковременное взаимодействие друг с другом. Примерами столкновений являются соударения бильярдных шаров, рассеяние одних элементарных частиц на других в ускорителях, пролет космического корабля вблизи Луны, захват электрона положительным ионом и т.д. Изучение столкновений и рассеяний играет важную роль в современной физике, особенно в физике элементарных частиц.

Удар представляет частный случай столкновения. Под **ударом** в механике понимается кратковременное взаимодействие двух и более тел, возникающее при их соприкосновении. Возникающие при ударе силы столь значительны, что роль всех других сил несущественна, и сталкивающиеся тела можно рассматривать как замкнутую систему, к которой применимы законы сохранения.

Удар называется **абсолютно упругим**, если механическая энергия тел не переходит в немеханические виды энергии, т.е. внутренние энергии тел не меняются. При таком ударе кинетическая энергия сначала переходит в энергию упругой деформации. При этом возникают упругие силы, возрастающие с увеличением деформации. В момент наибольшего сжатия упругие силы максимальны. Под действием этих сил тела возвращаются к первоначальной форме, отталкивая друг друга. Потенциальная энергия упругой деформации снова переходит в кинетическую энергию, и тела разлетаются со скоростями, величина и направление которых определяются законами сохранения энергии и импульса, а если тела вращаются, то и законом сохранения момента импульса. Упругий удар реализуется, например, при соударении стальных шаров, когда потери механической энергии очень малы.

Удар называется **неупругим**, если при ударе механическая энергия тел полностью или частично переходит во внутреннюю (тепловую) энергию, а потенциальной энергии деформации не возникает. Столкнувшиеся тела после такого удара либо двигаются с одинаковой скоростью, либо покоятся. В этом случае скорость движения после соударения определяется законом сохранения импульса. Тогда закон сохранения всех видов энергии также выполняется, однако механическая энергия тел не сохраняется. Неупругий удар реализуется, например, при столкновении пластилиновых шаров.

Если направление движения двух соударяющихся шаров в момент их соприкосновения совпадает с прямой, соединяющей центры шаров, то удар называется **центральным**. Удар называется **нецентральным**, если в момент удара начальные скорости шаров не совпадают по направлению с линией центров.

6. Метод определения характеристик абсолютно упругого удара

Будем рассматривать абсолютно упругий центральный удар. Пусть два шара с одинаковыми массами ($m_1 = m_2 = m$) подвешены на практически нерастяжимых нитях длиной ℓ (см. рис. 4). Если отвести первый шар 1 на угол α от положения равновесия и отпустить его, то возвращаясь в положение равновесия и имея в момент, предшествующий удару, скорость $\vec{v}_1$, он передаст импульс и энергию левому шару 2 (при этом пренебрегаем вращением шаров).

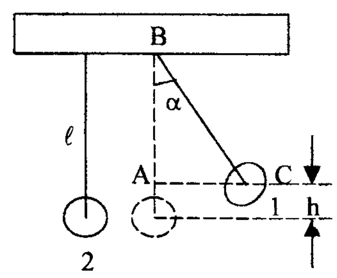

Рис. 4.

Обозначим через $\vec{v}_1'$ и $\vec{v}_2'$ скорости шаров после удара. Тогда законы сохранения импульса и энергии соответственно запишем:

$$m\vec{v}_1 = m\vec{v}_1' + m\vec{v}_2'; \qquad (17)$$

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{m(v_1')^2}{2} + \frac{m(v_2')^2}{2}. \qquad (18)$$

Уравнения (17) и (18) можно переписать в виде: $\vec{v}_1 = \vec{v}_1' + \vec{v}_2'$ и $v_1^2 = (v_1')^2 + (v_2')^2$. Отсюда следует, что $2\,\vec{v}_1'\vec{v}_2' = 0$. Так как под действием удара шар 2 начал двигаться, то $v_2' \neq 0$; значит $v_1' = 0$, и тогда $v_1 = v_2'$, т.е. при равенстве масс соударяющихся шаров движущийся шар полностью передает импульс неподвижному и останавливается. Шары как бы обмениваются скоростями.

Шар, отведенный от положения равновесия на угол α, обладает запасом потенциальной энергии $U = mgh$. Эта энергия в момент, предшествующий удару, полностью переходит в кинетическую энергию $U = T = \frac{mv_1^2}{2} = \frac{p_1^2}{2m}$, откуда имеем

$$v_1 = \sqrt{2gh}\ . \tag{19}$$

Из треугольника ABC (рис.4) следует: $\frac{\ell - h}{\ell} = \cos\alpha$, откуда $h = 2\ell\sin^2\frac{\alpha}{2}$, тогда после подстановки в (19) дает

$$v_1 = 2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{g\ell}\ , \tag{20}$$

где ℓ – длина нити; g =9,81 м/с^2.

Так как $\vec{p} = m\vec{v}$, то с учетом (20), опуская индекс 1, получим

$$p = 2m\sqrt{g\ell}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\ . \tag{21}$$

По второму закону Ньютона имеем

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \text{или} \quad F = \frac{\Delta p}{\Delta t}\ .$$

Поскольку $\Delta p = p - p'$; $\Delta t = \tau$, то сила взаимодействия шаров при абсолютно упругом ударе рассчитывается по формуле

$$F = \frac{p}{\tau}\ , \tag{22}$$

где время соударения шаров τ определяется с помощью частотомера-хронометра. Энергия шара T после столкновения находится из соотношения

$$T = \frac{p^2}{2m}\ . \tag{23}$$

7. Выполнение работы

1. Измерить длительность упругого удара шаров для различных углов отклонения одного из шаров от положения равновесия.
2. Рассчитать импульс, энергию шара и силу соударения для различных углов отклонения шара от положения равновесия.

Вопросы для обсуждения

1. Вывести закон сохранения импульса.
2. Вывести закон сохранения момента импульса.
3. Кинетическая и потенциальная энергии.
4. Вывести закон сохранения механической энергии.
5. Что называется столкновением? ударом?
6. Какой удар называется абсолютно упругим? неупругим?
7. Дайте определение центрального и нецентрального ударов.
8. Какие законы сохранения используются при исследовании абсолютно упругого удара? неупругого удара?

Литература

1. *Савельев И.В. Курс общей физики, т. 1. – М.: Наука, 1987, § 16, 21-25, 27.*
2. *Зисман Г.А., Тодес О.М. Курс общей физики, т. 1. – М.: Наука, 1974, § 8.*
3. *Детлаф А.А., Яварский В.М., Милковская Л.Б. Курс физики, т. 1. – М.: Наука, 1973, § 2.5.*
4. *Сивухин Д.В. Общий курс физики, т. 1. – М.: Наука, 1974, § 26, 28, 38.*