Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра физики

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОДУЛЯ ЮНГА МЕТОДОМ СТОЯЧИХ ВОЛН В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

Методические указания
к лабораторной работе по физике
для студентов строительных специальностей

Минск 2006

УДК 539.32+534.22(076.5)
ББК 22.251я7
О 62

Составители:
А.А. Баранов, А.П. Каравай

Рецензенты:
И.А .Сатиков, В.И. Кудин

Рассматриваются вопросы образования бегущих и стоячих волн в твердых телах. Описана методика определения скорости распространения продольных волн в упругих средах и модулей Юнга этих сред.

Лабораторная работа

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОДУЛЯ ЮНГА МЕТОДОМ СТОЯЧИХ ВОЛН В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

Цель работы: Изучить условия образования стоячих волн в упругой среде, определить скорость распространения продольных волн в металлических стержнях и модули Юнга латуни, меди, стали.

1. Гармонические колебания

Колебания физической величины S называются **гармоническими**, если она меняется со временем t по закону **косинуса или** синуса (см. рис. 1):

$$S = A\cos(\omega t + \varphi_0). \tag{1}$$

Здесь S – отклонение величины от положения **равновесия**;

A – амплитуда колебания, т.е. наибольшее **отклонение** величины от положения равновесия;

ω – циклическая (круговая) частота;

t – текущее время;

φ_0 – начальная фаза, определяемая началом отсчета времени t;

$(\omega t + \varphi_0)$ – фаза гармонического колебания.

Фаза и начальная фаза измеряется в радианах.

Радиан – центральный угол, длина дуги которого равна радиусу.

Время одного полного колебания есть **период колебаний** T.

Число полных колебаний за 1 секунду, т.е. **частота** ν, связано с периодом колебаний T соотношением

$$\nu = \frac{1}{T}$$

Единица частоты 1 герц (Гц) – одно полное **колебание за 1 секунду**. Циклическая частота ω равна

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}.$$

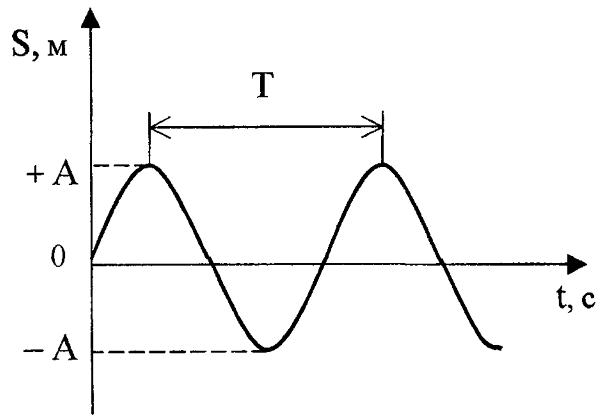

Рис. 1

2. Волны в упругих средах

Упругой (механической) **волной** называется процесс распространения колебаний частиц вещества в упругой среде.

Волна называется **продольной**, если колебания частиц среды происходит вдоль направления распространения волны. **Продольные волны** возникают при **деформациях сжатия и растяжения** и поэтому распространяются во всех средах: твердых, жидких и газообразных.

Волна называется **поперечной**, если колебания частиц среды происходят в направлениях, перпендикулярных к направлению

распространения волны. **Поперечные волны** возникают при деформациях сдвига и поэтому распространяются **только в твердых телах**.

При распространении упругой волны частицы среды не распространяются с волной, а только совершают колебания возле положения равновесия. Скорость распространения волны зависит от свойств среды.

Фронт волны – геометрическое место точек, до которых дошли колебания. **Волновая поверхность** – совокупность точек, колеблющихся в одной фазе. По виду волновой поверхности различают волны: плоские, сферические, цилиндрические и т.д.

Звуковая (акустическая) **волна** или **звук** – процесс распространения колебаний в упругой среде с частотой 16 Гц ... 20 кГц. Колебания именно с такой частотой воспринимаются человеческим ухом.

Получим уравнение плоской гармонической волны в одномерном случае (рис. 2), т.е. найдем зависимость смещения S(x, t) частиц среды как функцию координаты x и времени t.

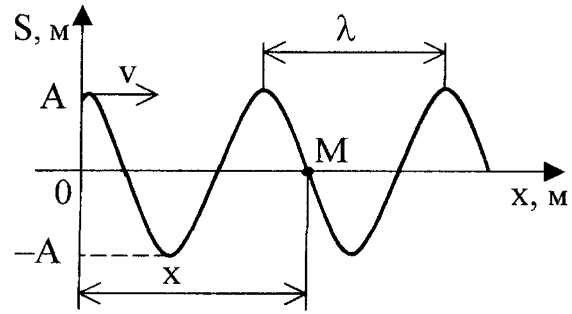

Рис. 2

Пусть частицы среды, лежащие в плоскости $x = 0$, совершают незатухающие гармонические колебания с амплитудой A, частотой ω и нулевой начальной фазой $\varphi_0 = 0$:

$$S(0,t) = A\cos\omega t \ . \qquad (2)$$

Так как среда упругая, то колебания, перпендикулярные оси x, передаются вдоль оси x соседним частицам среды со скоростью v.

Колебания частиц в точке M с координатой x будут гармоническими с такой же амплитудой A, частотой ω, но с запаздываем по времени на величину

$$\tau = \frac{x}{v}. \qquad (3)$$

Тогда, подставляя (3) в (2), получаем **уравнение плоской поперечной гармонической бегущей волны в одномерном случае**, распространяющейся вдоль положительного направления оси x

$$S(x,t) = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) . \qquad (4)$$

Здесь S – величина смещения частиц среды от положения равновесия, x – расстояние от источника волны, v – скорость распространения волны. Остальные обозначения как и в уравнении (1). Начальная фаза φ_0 в (4) принята равной нулю; если $\varphi_0 \neq 0$, то фаза волны равна $\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi_0\right]$. **Уравнение продольной волны** также описывается соотношением (4), но под S(x, t) понимается уже смещение частиц вдоль оси x.

Длина волны λ есть расстояние между точками среды, для которых разность фаз колебаний равна 2π (см. Рис.2).

За время равное периоду колебаний частиц среды волна распространяется на расстояние, равное длине волны λ:

$$\lambda = vT = \frac{v}{\nu}.$$

Откуда получается

$$v = \lambda\nu \ . \qquad (5)$$

Вводится также **волновое число k**, т.е. число длин волн, укладывающихся на отрезке длиной 2π,

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \qquad (6)$$

Так как $\frac{\omega}{v} = \frac{2\pi\nu}{v} = \frac{2\pi\nu}{\lambda\nu} = \frac{2\pi}{\lambda} = k$, то уравнение волны (4) записывают еще и так

$$S(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0) \ . \qquad (7)$$

Уравнение волны, распространяющейся вдоль отрицательного направления оси x, есть

$$S(x,t) = A\cos(\omega t + kx + \varphi_0) \ . \qquad (8)$$

Непосредственным дифференцированием уравнения (7) можно проверить, что **уравнение волны** (7) **есть решение волнового уравнения** (9) (дифференциальные уравнения в частных производных)

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \ . \qquad (9)$$

Волновые уравнения типа (9) описывают процессы распространения волн в различных средах. **Бегущие волны (4), (7) переносят энергию в пространстве**.

3. Стоячие волны в однородных одномерных структурах

Стоячие волны есть **результат интерференции** двух когерентных волн, при этом в различных точках пространства происходит усиление или ослабление колебаний. Две волны называются **когерентными**, если они имеют постоянную во времени разность фаз. **Когерентными** могут быть **лишь** волны с **одинаковой** частотой. Для наблюдения интерференции колебания должны происходить в одной плоскости.

Стоячие волны можно получить путем наложения двух встречных плоских волн с одинаковой частотой и амплитудой. Практически они возникают при отражении волн от границы раздела сред.

Пусть на границу раздела двух сред падает волна

$$S_1 = A\cos(\omega t - kx + \varphi_1).$$

Тогда отраженная волна запишется в виде

$$S_2 = A\cos(\omega t + kx + \varphi_2).$$

Результирующее смещение S точки среды, вызываемое совместным воздействием падающей и отраженной волн, будет равна алгебраическая сумма смещений S_1 и S_2, вызываемых каждой из этих волн в отдельности. Используя известное тригонометрическое соотношение, запишем:

$$S = S_1 + S_2 = 2A\cos\left(kx + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right)\cos\left(\omega t + \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}\right), \quad (10)$$

Уравнение (10) называется **уравнением стоячей волны**.

1. Если среда, от которой происходит отражение, менее плотная, чем та, в которой распространяется волна, то на границе отражения образуется пучность ($A^* = 2A$). Это наблюдается, например, на концах металлического стержня длиной l (рис.3). В этом случае фаза отраженной волны не меняется. Если $\varphi_1 = 0$, то и $\varphi_2 = 0$. Тогда уравнение (10) имеет вид:

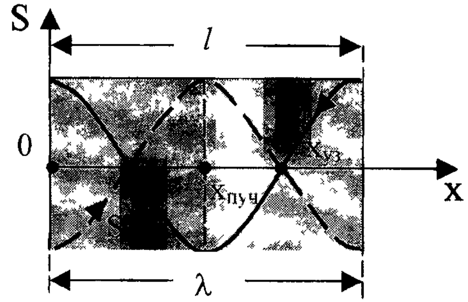

Рис 3

$$S = 2A\cos kx \cos\omega t.$$

Здесь $A^* = 2A\cos kx$ – есть **амплитуда стоячей волны или**, используя **выражение** (6), запишем.

$$A^* = 2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \quad (11)$$

В отличие от бегущей волны, в которой различные точки волны колеблются с одинаковой амплитудой, в стоячей волне амплитуда колебаний зависит от координаты точек. В точках, координаты которых удовлетворяют условию

$$2\pi\frac{x}{\lambda} = \pm n\pi \quad (n = 0, 1, 2 \ldots) \quad (12)$$

амплитуда результирующего колебания максимальна и равна $A^* = 2A$, т.е. наблюдается пучность. Из (12) получаем значение координат пучностей:

$$x_{пучн} = \pm n\frac{\lambda}{2} \quad (n = 0,1,2,3,\ldots) \quad (13)$$

В точках, координаты которых удовлетворяют условию

$$2\pi\frac{x}{\lambda} = \pm(2n+1)\frac{\pi}{2} \quad (n = 0,1,2,3,\ldots), \quad (14)$$

амплитуда колебаний равна нулю ($A^* = 0$), т.е. наблюдается узел. Из (14) получаем координаты узлов

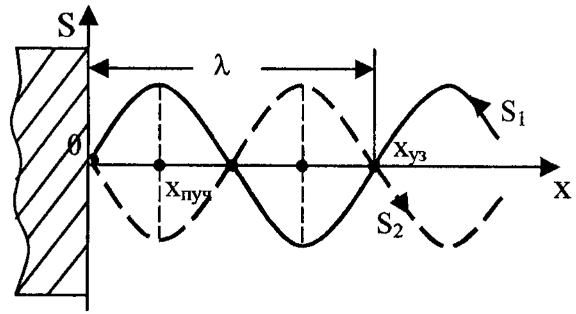

Рис.4

$$x_{узл} = \pm(2n+1)\frac{\lambda}{4} \quad (n = 0,1,2,3,\ldots) \quad (15)$$

2. Если среда от которой происходит отражение более плотная, чем та в которой распространяется волна, то на границе отражения образуется узел ($A^* = 0$) (рис.4).

В этом случае фаза отраженной волны меняется на π. Если $\varphi_1 = 0$, то $\varphi_2 = \pi$. Тогда уравнение стоячей волны и уравнение (10) имеет вид:

$$S = 2A\cos\left(kx + \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = 2A(-\sin kx)\cdot(-\sin\omega t) = \quad (16)$$

$$= 2A\sin kx \cdot \sin\omega t$$

Здесь

$$A^* = 2A\sin kx = 2A\sin\left(\frac{2n}{\lambda}x\right) \quad (17)$$

есть **амплитуда стоячей волны**.

В точках, координаты которых удовлетворяют условию

$$\frac{2\pi}{\lambda}x = \pm n\pi \quad (n = 0,\ 1,\ 2\ \ldots) \quad (18)$$

амплитуда колебания равна нулю ($A^* = 0$), т.е. **наблюдается** узел. Из (18) получаем координаты узлов:

$$x_{узл} = \pm n\frac{\lambda}{2} \quad (19)$$

В точках, координаты которых удовлетворяют условию

$$\frac{2\pi}{\lambda}x = \pm(2n+1)\frac{\pi}{2} \quad (n = 0,1,2,3,\ldots), \quad (20)$$

амплитуда колебаний максимальна и равна $A^* = 2A$, т.е. наблюдается пучность. Из (20) получаем значения координат пучностей:

$$x_{пучн} = \pm(2n+1)\frac{\lambda}{4} \quad (21)$$

Строго говоря, появление на границе раздела сред пучности или узла зависит от волновых сопротивлений сред. **Волновым сопротивлением** среды называют произведение плотности среды ρ на скорость волны v, т.е. произведение ρv.

В стоячей волне все точки между соседними узлами колеблются с одинаковой фазой – все они одновременно проходят положение равновесия и одновременно достигают максимальных смещений.

Точки, расположенные по разные стороны узла, колеблются в противофазе – они одновременно проходят положение равновесия, но в противоположных направлениях, одновременно достигают максимальных смещений, но с противоположных сторон от положения равновесия.

Образующие стоячую волну падающая и отраженная волны, распространяясь во взаимно противоположных направлениях, переносят одинаковую энергию колебательного движения. В итоге результирующий поток энергии в каком-либо из направлений, представляющий собой сумму двух одинаковых по величине, но противоположно направленных потоков, равен нулю. Следовательно, **стоячая волна не переносит энергию**, откуда и следует название волны.

В момент, когда частицы среды проходят положение равновесия, полная энергия частиц, охваченных колебанием, является кинетической, напротив, в положении максимального отклонения частиц от положения равновесия энергия их переходит в потенциальную.

В среде, имеющей ограниченный размер *l*, (например, закрепленный на концах стержень или струна) стоячая волна может образовываться только в том случае, если величина *l* кратна целому числу полуволн $\frac{\lambda}{2}$

$$\ell = n\cdot\frac{\lambda_n}{2} \quad (n = 0,1,2,3,\ldots) \quad (22)$$

Определяемые этим условием частоты колебаний **называются собственными частотами** ν_n

$$\nu_n = \frac{v}{\lambda_n} = n\frac{v}{2\ell} \quad (23)$$

Самая низкая из собственных частот

$$\nu_1 = \frac{v}{2\ell} \quad (24)$$

называется **основным тоном** или первой гармоникой, а все остальные собственные частоты – **обертонами** или высшими гармониками. Частоты обертонов ν_n кратны основному тону ν_1

$$\nu_n = n\nu_1 \quad (n = 0,1,2,3,\dots) \qquad (25)$$

Возникновение собственных колебаний в стержне можно использовать для нахождения скорости звука в твердых телах.

4. Закон Гука. Модуль Юнга

Упругие волны представляют упругие деформации, распространяющиеся в среде. **Деформация** есть изменение формы и размеров тела под влиянием внешних воздействий. **Упругой** называется деформация, исчезающая после прекращения воздействия, иначе деформация – пластическая.

Для упругих деформаций справедлив **закон Гука: относительная деформация пропорциональна приложенному напряжению**.

Для продольного растяжения (сжатия) образца цилиндрической формы закон Гука принимает вид

$$\sigma = E\varepsilon \qquad (26)$$

Здесь **напряжение** σ есть отношение деформирующей силы F к площади поперечного сечения S

$$\sigma = \frac{F}{S} \qquad (27)$$

Относительная деформация есть отношение абсолютной деформации Δl к первоначальной длине стержня l_0

$$\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell_0} \qquad (28)$$

Абсолютная деформация $\Delta l = (l - l_0)$ есть разность конечной и начальной длины стержня.

Коэффициент пропорциональности E в законе Гука есть **модуль Юнга**. Из закона Гука вытекает физический смысл модуля Юнга $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon}$:

Модуль Юнга численно равен напряжению при относительной деформации равной единице. Размерность модуля Юнга – паскаль (Па). Для стали $E_{ст} \approx 2\cdot 10^{11}$ Па.

Закон Гука (26) с учетом (27) и (28) можно представить также в виде

$$F = k\Delta\ell ,$$

где коэффициент упругости (жесткость) $k = \dfrac{ES}{\ell_0}$.

Скорость распространения продольной волны в упругой среде связана с модулем Юнга E и плотностью среды ρ соотношением [1]

$$v_{прод} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad (29)$$

Скорость распространения поперечной волны в твердом теле связана с модулем сдвига G и плотностью среды ρ соотношением

$$v_{попер} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} ,$$

причем $v_{попер} < v_{прод}$.

5. Метод измерения

Схема установки для определения скорости распространения продольных волн в твердых телах изображена на рис. 5.

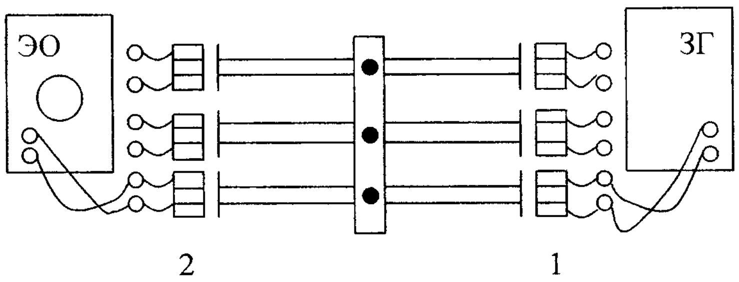

Рис. 5

Стержни из исследуемых материалов (медь, латунь, сталь) с ферромагнитными наконечниками закреплены посередине. Вблизи наконечников каждого из стержней укреплены электромагниты. Электромагнит, расположенный вблизи одного из концов стержня, соединяется с осциллографом, а на электромагнит у другого конца стержня подается синусоидальное напряжение от генератора звуковой частоты. При включенном генераторе по обмотке электромагнита 1 (Рис. 4) идет переменный ток. При этом ферромагнитный наконечник, прикрепленный к стержню, притягивается к сердечнику электромагнита с разной силой, и в стержне возбуждаются упругие продольные волны с частотой колебаний ν, равной частоте задающего звукового генератора.

В обмотке электромагнита 2, расположенного вблизи второго ферромагнитного наконечника колеблющегося стержня, возникает переменная ЭДС индукции, амплитудное значение которой пропорционально амплитуде колебаний частиц стержня. Подавая сигнал с обмотки этого электромагнита на осциллограф, можно следить за изменением амплитуды колебаний конца стержня.

Если частота звукового генератора, а следовательно, и частота продольных волн **совпадает с какой-либо из собственных частот колебания стержня, то наступит резонанс**, и в стержне возникнет

стоячая волна. Стержень начнет звучать, на осциллографе **обнаружится резкое возрастание амплитуды колебаний.**

В описанной выше установке каждый из стержней закреплен посередине. В неподвижно закрепленных точках должны быть узлы стоячей волны, а на свободных концах стержня – пучности. Это условие выполняется, если на длине l стержня укладывается нечетное число полуволн $\frac{\lambda}{2}$, т.е.

$$\ell = (2n-1)\frac{\lambda_n}{2} \quad (n = 0,1,2,3,\ldots) \qquad (30)$$

Колебания стержня, закрепленного посередине, представлены на рис. 6, причем продольные перемещения точек стержня отложены по вертикали.

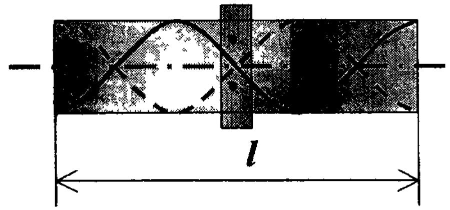

Рис. 6

Длина волны λ_n, частота колебаний ν_n и скорость распространения волн v связаны соотношением $v = \lambda_n \nu_n$, откуда

$$\nu_n = \frac{v}{\lambda_n} \qquad (31)$$

Из (30) и (31) получаем выражение для собственных частот колебаний закрепленного посередине стержня

$$\nu_n = \frac{(2n-1)v}{2\ell} \quad (n = 0,1,2,3,\ldots) \qquad (32)$$

Резонансные колебания стержня возникают при совпадении частоты вынуждающей силы (частоты генератора) с любой из собственных частот, определяемых уравнением (32).

Определив частоту ν_1 основного тона (n = 1) и длину l стержня, можно вычислить скорость распространения продольных волн в веществе, из которого изготовлен стержень, по формуле (24)

$$v = 2\ell\nu_1, \qquad (33)$$

Так как скорость распространения продольных волн в твердом веществе связана с модулем Юнга E вещества и плотностью ρ уравнением (29) $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, то из уравнений (33) и (29) получаем формулу для определения модуля Юнга вещества

$$E = 4\rho\ell^2\nu_1^2. \qquad (34)$$

Контрольные вопросы

1. Записать уравнение волны и пояснить физический смысл всех величин, входящих в это уравнение.
2. Что называется фронтом волны, волновой поверхностью, длиной волны, волновым числом?
3. Записать волновое уравнение. Как связаны волновое уравнение и уравнение волны?
4. Что такое звуковая волна? Звук – продольная или поперечная волна?
5. Записать уравнение стоячей волны. Что такое узел и пучность? Когда они получаются на границе раздела двух сред?
6. Каковы основные различия между бегущей и стоячей волнами?
7. Записать закон Гука через модуль Юнга. Каков физический смысл модуля Юнга?
8. Что такое резонанс?
9. Описать метод получения стоячих волн в данной работе.

Литература

1. Трофимова Т.И. Курс физики. - М.: Высшая школа, 1985. - § 21; гл. 19.
2. Дылесон Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. – М.: Наука, 1982. – с 30-50, 102-110.
3. Крауфорд Ф. Волны. – М.: Наука, 1976.