

Что такое тензор?

Как объяснить человеку, совершенно не связанному с математикой, что такое тензор? Классическое определение тензора, взятое из книг по линейной алгебре, здесь явно не подходит - оно вызовет больше вопросов, чем даст ответов. С другой стороны, не так-то просто рассказать “на пальцах” про этот математический объект. А ведь ещё Эйнштейн говорил: “...вы действительно понимаете только то, что можете объяснить своей бабушке.” Поэтому любой физик должен быть в состоянии объяснить уборщице в лаборатории, чем он тут занимается.

Рассказать, что такое вектор, похоже, сможет каждый. Вообще люди описывают с помощью векторов очень разные объекты. Простейший пример - направление в пространстве. Это довольно просто представить любому человеку. Возьмем обычный лист бумаги. У листа бумаги есть два измерения - длина и ширина. Направление на листе бумаги можно задать с помощью вектора \vec{a} , который будет описываться набором двух чисел (x, y) , где x и y - длины проекций вектора \vec{a} на края листа.

Бывает весьма удобно описывать с помощью векторов очень многие объекты из нашей с вами повседневной жизни. Возьмем, например, бутерброд. Довольно часто нам достаточно знать лишь несколько параметров данного объекта, чтобы иметь достаточное представление о нем (масса, температура, содержание колбасы, срок годности и т.д.). Каждый из этих параметров - аналог координаты x либо y для вектора на плоскости. В зависимости от того, что конкретно нас интересует в бутерброде, его можно описывать с помощью набора некоторых чисел. Для простоты рассмотрим бутерброд, который описывается двумя параметрами. Пусть нас интересует его температура и масса - поэтому бутерброду ставится в соответствие пара чисел (T, m) . Математику работать с такой парой чисел гораздо приятнее, хотя, поразмыслив, он, конечно, предпочтет реальный бутерброд.

Что же теперь случится, если наш бутерброд попадет в руки американскому математику? Очевидно, что сам бутерброд от этого не изменится. А вот пара чисел (T, m) , которую мы использовали, будет ему непонятна. Мы ведь, естественно, измеряли массу бутерброда в граммах, а температуру в градусах Цельсия. А в Америке люди привыкли измерять массу в фунтах или унциях, а температуру в градусах по Фаренгейту. Переход к новым единицам измерения (выбор нового базиса) осуществляется по хорошо известным формулам. Температура и масса нашего бутерброда в Америке (координаты вектора в новом базисе) будут равны

$$T_F = \frac{9}{5}T_C + 32,$$

$$m_{oz} = 0.035m_{gr},$$

где T_F, T_C - температура по Фаренгейту и по Цельсию, соответственно, m_{oz}, m_{gr} - масса в унциях и граммах, соответственно. После данных преобразований с нашим бутербродом (T_F, m_{oz}) удобно работать людям в Америке.

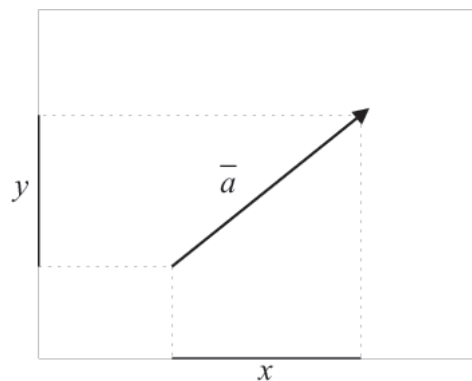


Рис. 1 — Вектор на плоскости.

Согласитесь, что горячий, аппетитно пахнущий бутерброд выглядит гораздо более привлекательно. Поэтому положим наш бутерброд в микроволновку. Пусть это будет самая простая микроволновка, которая “готовит” бутерброды в течение одной минуты и мощность её всегда постоянна.

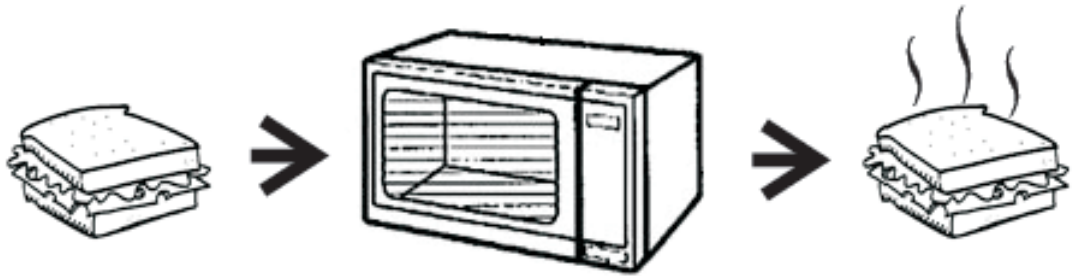


Рис. 2 — Преобразование бутерброда (линейное преобразование вектора (T, m)).

Что делает микроволновка? Она просто разогревает бутерброд (делает линейное преобразование вектора). Можно поэкспериментировать с бутербродами разной массы, и с разной начальной температурой и в принципе определить формулы, позволяющие предугадать заранее, каким станет бутерброд (T, m) после микроволновки. Конечная температура бутерброда, вообще говоря, зависит как от массы бутерброда (большой, килограммовый батон с сыром, майонезом и колбасой нагреется меньше, чем маленький сэндвич), так и от начальной температуры:

$$T' = aT + bm,$$

где a, b - коэффициенты, которые мы определили путем экспериментов с различными бутербродами. Пусть для определенности $a = 2.5$, $b = -0.05$. Тогда для бутерброда ($25^\circ C$, 200гр)

$$T' = 2.5 \times 25 - 0.05 \times 200 = 52.5^\circ C,$$

Масса при нагреве немного уменьшится (всё-таки из бутерброда испарится немного воды, часть его пойдёт на диффузию и мы почувствуем запах ну и т.д.) От температуры масса бутерброда практически не зависит. Поэтому

$$m' = cT + dm,$$

где c, d так же, как и a, b - экспериментальные коэффициенты. Пусть $c = 0$, $d = 0.95$. Тогда конечная масса

$$m' = 0 \times 25 + 0.95 \times 200 = 190gr,$$

Запишем формулы преобразования бутерброда микроволновкой вместе

$$\begin{cases} T' = aT + bm \\ m' = cT + dm \end{cases}$$

или в более компактном виде

$$\begin{pmatrix} T' \\ m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ m \end{pmatrix}$$

Если мы описывали бутерброд с помощью пары чисел (T, m) , то для описания микроволновки, которая работает с такими бутербродами (преобразует двумерные векторы), нужен уже набор из четырёх чисел. Такой набор часто записывают в виде таблицы (матрицы)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Видно, что микроволновка является несколько более сложным объектом, чем бутерброд...

В нашем случае она играет роль некоторого преобразователя бутербродов (векторов), а набор коэффициентов (a, b, c, d) *связывает* бутерброд до и после преобразования. На самом простом уровне рассмотрения микроволновку (набор коэффициентов a, b, c, d) можно формально считать тензором. Причем, если нашей микроволновкой захочет воспользоваться американец (если мы перейдем к новому базису), то понятно, что её надо будет преобразовать более сложным образом, чем просто бутерброд (вектор). Так как микроволновке всё равно, кто ей пользуется, то, очевидно, вид уравнений, удобных американскому математику будет тем же, что и у нас. Только изменятся коэффициенты a, b, c, d по некоторому, в общем случае нетривиальному правилу.

Поэтому вполне можно считать примером тензора микроволновку (набор коэффициентов a, b, c, d) + формулы перевода наших единиц измерения к американским, либо к любым другим (правила перехода к новому базису).

Конечно, такое определение тензора вызовет праведный гнев любого математика, но, когда мы объясняем, что такое тензор бабушке, такого примитивного рассмотрения вполне достаточно. А если у вашей бабушки всё же возникнет желание более глубоко разобраться с тензорами, то со спокойной душой отправляйте её к лучшим книгам по линейной алгебре! =)

Bera & Riedel